**МИНИСТАРСТВО НАУКЕ,**

**ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА И ИНОВАЦИЈА**

**Матични научни одбор за електронику,**

**телекомуникације и инфомационе технологије**

ТР 25/25

Београд 28.04.2025. године

На основу захтева Факултета инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитета у Крагујевцу, за верификацију техничког решења под називом: **„Софтвер PAKF-Turbulent за моделирање турбулентног струјања флуида применом k-ω модела и RANS једначина“,** чији су аутори: др Александар Николић, др Мирослав Живковић, др Ненад Филиповић и др Марко Топаловић, а према *Правилнику о стицању истраживачких и научних звања* („Сл. Гласник, 159/20“), Матични научни одбор за електронику, телекомуникације и информационе технологије је на седници одржаној 28.04.2025. године разматрао исти и донео одлуку да предлаже признавање техничког решења у категорији:

**М85 - Ново техничко решење (није комерцијализовано)**

Матични научни одбор за електронику,

телекомуникације и инфомационе технологије

председник

проф. др Жељко Ђуровић

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
Факултет инжењерских наука
Број: 01-1/930-17
20.03.2025. године
Крагујевац

На предлог Катедре за примењену механику и аутоматско управљање (број 01-1/842 од 06.03.2025. године) а на основу чланова 1 и 3. став 5. Правилника о стицању истраживачких и научних звања (Сл. гл. РС бр. 159/2020 и 14/2023) и члана 173 Статута Факултета инжењерских наука у Крагујевцу (бр. 01-1/2700 од 17.08.2023. год. – пречишћен текст), Наставно-научно веће Факултета инжењерских наука у Крагујевцу, на седници одржаној 20.03.2025. године, донело је

# О Д Л У К У

**I** Усваја се пријава техничког решења под насловом: „**Софтвер PAKF-Turbulent за моделирање турбулентног струјања флуида применом k-ω модела и RANS једначина**“, чију су аутори: др Александар Николић, научни сарадник, др Мирослав Живковић, редовни професор, др Ненад Филиповић, редовни професор и др Марко Топаловић, научни сарадник.

**II** Техничко решење се упућује Матичном одбору за електронику, телекомуникације и информационе технологије.

Одлуку доставити:
- Матичном одбору Министарства
- Ауторима
- Архиви

ДЕКАН ФАКУЛТЕТА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА

Republika Srbija - Univerzitet u Kragujevcu - Fakultet inženjerskih nauka 200064465 2025.03.20 14:36:58 +01'00'

Slobodan Savić 200045797 2025.03.20 14:33:43 +01'00'

Др Слободан Савић, редовни професор

ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА
УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

# ТЕХНИЧКО РЕШЕЊЕ

М85 Ново техничко решење у фази реализације

## Софтвер *PAKF-Turbulelnt* за моделирање турбулентног струјања флуида применом k-ω модела и RANS једначина

АУТОРИ

Александар Николић
Мирослав Живковић
Ненад Филиповић
Марко Топаловић

# Подаци о техничком решењу

Врста техничког решења:
M85 – Ново техничко решење у фази реализације

## 1 Аутори техничког решења


- Др Александар Николић[1], научни сарадник (dziga@kg.ac.rs)
- Др Мирослав Живковић[2], редовни професор (miroslav.zivkovic@kg.ac.rs)
- Др Ненад Филиповић[2], редовни професор (fica@kg.ac.rs)
- Др Марко Топаловић[1], научни сарадник (topalovic@kg.ac.rs)

[1] Институт за информационе технологије, Универзитет у Крагујевцу
[2] Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу


## 2 Назив техничког решења

- Софтвер *PAKF-TurbuleInt* за моделирање турбулентног струјања флуида применом k-ω модела и RANS једначина

## 3 Кључне речи

- Метода коначних елемената, Рачунска динамике флуида, Турбулентно струјање, k-ω Модел, RANS једначине, Биомеханика, Крвни судови

## 4 Наручилац и корисник техничког решења

- Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## 5 Година када је техничко решење комплетирано

- Развој посебног софтвера *PAKF-TurbuleInt* (који се издваја уградњом k-ω модела и RANS једначина) започет је 2018. године у оквиру пројекта технолошког развоја Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије ТР32036 и настављен је у оквиру накнадних инструмената финансирања научно истраживачког рада НИО од стране ресорног министарства. Имплементација алгоритама k-ω модела и RANS једначина, верификација програма, и израда документације за *PAKF-TurbuleInt* комплетирани су 2025. године.

## 6 Година када је техничко решење почело да се примењује

- Техничко решење се примењује од 2025. године на Факултету инжењерских наука, Универзитета у Крагујевцу

## 7 Верификација резултата

- Резултати су верификовани поређењем са експерименталним резултатима објављеним у литератури, док реални модел каротидне бифуркације служи да представи примењљивост решења за хемо-динамичку анализу у биоинжењерингу

## 8 Област и научна дисциплина на коју се техничко решење односи

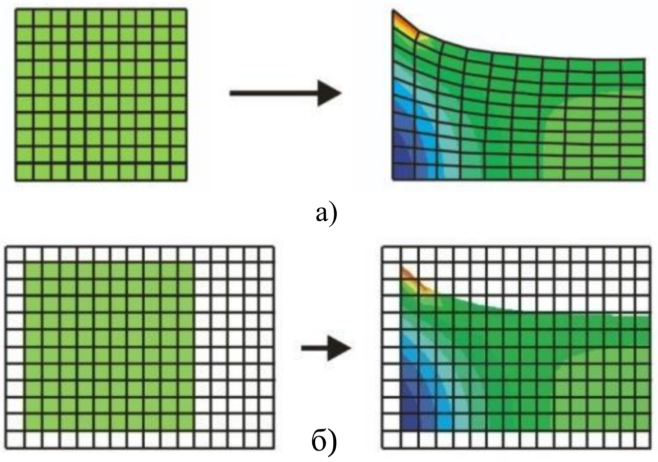
- Рачунска механика и информационе технологије, за које је надлежан *Матични научни одбор за електронику, телекомуникације и информационе технологије*.

# 9 Опис проблема који се решава техничким решењем

Техничко решење категорије М85, *Софтвер **PAKF-Turbulelnt** за моделирање турбулентног струјања флуида применом k-ω модела и RANS једначина*, припада области научно-техничких услуга, пројектовање и развој компјутерског софтвера. Описани софтвер представља нумерички солвер заснован на Методи Коначних Елемената, нумеричкој методи познатој и под својим енглеским именом Finite Element Method [1], са акронимом FEM, који ће се користити даље у тексту.

Техничко решење може да се примењује у индустрији за анализу турбулентних токова и интеракције између флуида и чврстих материјала, док у биоинжењерингу служи за моделирање струјања у крвним судовима. Модерна медицина укључује коришћење информационих технологија у сврху ефикасније терапије и предикције прогресије болести, што захтева индивидуализовану анализу за сваког пацијента. Процес моделирања и способност предвиђања понашања крвних судова омогућава лекарима да детаљно разумеју тренутно стање и будући развој кардиоваскуларног система пацијента, на основу чега се разматра евентуална потреба за хируршком интервенцијом.

FEM је метода заснована на механици континуума [2], и може се користити како у реалним проблемима механике чвстих тела [3], тако и у механици флуида [4]. У случају механике солида примењује се *Lagrange*-ова материјална формулација код које се прате физичке величине везане за посматрану материјалну честицу која се креће у простору [5]. У случају механике флуида разматра се кретање флуида кроз фиксну тачку у простору коришћењем *Euler*-овог просторног приступа [5]. Разлика између *Lagrange*-ове материјалне формулације и *Euler*-ове просторне формулације дата је на слици 1.




**Слика 1.** Формулације у FEM а) Lagrange-ова материјална б) Euler-ова просторна формулација

Недостатак *Euler*-овог просторног приступа је немогућност моделирања деформација судова унутар којих се налази фуид, као што је на пример ширење и контракција крвних судова, или сама промена облика и запремине срчаног мишића током једног откуцаја. Недостатак *Lagrange*-овог материјалног приступа код моделирања флуида представљају велике деформације и дисторзије мреже, наручито код турбулентног струјања. Решење представља спрезање солвера за флуиде и солиде путем заједничких чворова као што је то урађено у програму *PAK-Multiphysics*. У оквиру овог пакета програма, за анализу солида користи се FEM солвер *PAKS*, док се за анализу флуида користи новоразвијени FEM солвер *PAKF-Turbulelnt*. У овом техничком решењу представљен је део развоја солвера *PAKF-Turbulelnt* који се односи на уградњу *k-ω* модела који представља последњу реч технологије када је у питању моделирање турбулентног струјања коришћењем *Reynolds averaged Navier-Stokes* (RANS) једначина.

# 10 Стање решености проблема, приказ и анализа постојећих решења

## 10.1 Стање решености проблема код нас

У Србији се у настави и у истраживању на свим техничким факултетима државних универзитета у некој мери користе FEM програми, било да су то комерцијална или open-source решења. Треба пре свега истаћи Лабораторију за нумеричке симулације Катедре за ваздухопловство Машинског факултета у Београду [6]. Па ипак, оно што Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу издваја је традиција развоја домаћег софтвера *PAK* дуга скоро 50 година, коју је започео академик Милош Којић. Он је такође први у Србији започео истраживање у области биоинжењеринга, што ће бити највећа област примене програма *PAKF-TurbuleInt*. Колико је ауторима познато, у Србији не постоји ни једна друга истраживачка група која развија сопствени FEM програм, нити се бави применом FEM програма у биоинжењерингу.

## 10.2 Стање решености проблема у свету

У свету, али и код нас, за моделирање флуида најпопуларнија је метода коначних запремина (*Finite Volume Method, FVM*) на којој је заснован и најпознатији комерцијални софтвер овог типа *Ansys Fluent*. *Ansys Fluent* користи, између осталих, k-ω модел за моделирање турбулентног струјања и биће коришћен за поређење и верификацију резултата. Уколико се анализирају мултифизички проблеми који обухватају флуид-структурну интеракцију (*Fluid Structure Interaction, FSI*), користи се спрезање домена флуида и домена солида који су посебно моделирани засебним солверима *Ansys Fluent* и *Ansys Mechanical* [7]. Ansys са спрегнутим FVM-FEM солверима може да решава веома комплексне моделе флуид-структурне интеракције као што је на пример анализа нафтних платформи на отвореном мору које су оптерећене воденим стујама, таласима, ветром и сеизмичким таласима [8]. Унакрсна филтрација моделирана овим спрезањем даје резултате који имају добро подударање са експерименталним резултатима како у погледу вибрација солида изазваних вртложним струјањем, тако и у погледу самог струјања [7].

Други веома популарни комерцијални FEM програм *Comsol Multiphysics* користи мешовиту (*Arbitrary Lagrangian–Eulerian ALE*) методу зе дефинисање флуид-структурне интеракције.
ALE формулација за делове флуида код којих је битна граница између солида и флуида или слободна површина флуида користи *Lagrange*-ов опис, а где долази до дисторзија флуида *Euler*-ов. ALE формулација користи нови референтни домен који се креће независно од матерјалних тачака и који у граничним случајевима постаје *Lagrange*-ов или *Euler*-ов. *Comsol Multiphysics* између осталих модула има и “Solid Mechanics” и “CFD” модуле које је могуће повезати коришћењем “*Fluid-Structure Interaction*” интерфејса. У CFD модул *Comsol Multiphysics*-а који је заснован на FEM, уграђени су k-ω, k-ε модели и њихови деривати. Неки од врхунских примера коришћења FSI модула програма *Comsol Multiphysics* су аналза флуидних сила које делују на солид постављен као препрека току флуида и одвајање вртлога иза тог солида [9] и моделирање покретних крила [10].

FSI симулације је могуће вршити и помоћу *Altair* софтвера, конкретно *OptiStruct* који се користи за моделирање солида и који је заснован на FEM, и CFD солвера *AcuSolve* базираном на *Galerkin Least Squares (GLS)* деривату FEM. *Altair* FSI решење обухвата једнострано и обострано спрезање. Кој једностраног спрезања, деформације солида се користе као гранични услови CFD симулације и ово решење се користи за случајеве када имамо линеарне матерјалне карактеристике и мале деформације мреже. Обострано спрезање подразумева решавање нелинеарних проблема и паралелно извршавање *OptiStruct* и *AcuSolve* аналзе при чему се у сваком кораку врши размена чворних сила и померања између два солвера. Поред *Altair*-евог FEM солвера за солиде *OptiStruct,* CFD солвер *AcuSolve* је могуће повезати и са програмима

*Abaqus* и *MD-Nastran*. Неки од значајнијих примера коришћења солвера *AcuSolve* су поред осталих предвиђање локалних шаблона дејсва ветра у комбинацији са *Numerical Weather Prediction* (NWP) методом [11], и интеракција ћелија рака са белим крвними зрнцима у крвотоку [12]. Поменута анализа обухвата динамику слуида, структурну механику, контролу кретања у свих 6 степени слободе и биохемијске реакције на површинама у контакту [12]. Део ове комплексне анализе спроведен је спрезањем *AcuSolve* и *ABAQUS* солвера [12].

*ABAQUS*, је са друге стране, пружао могућност хибридне FEM/FVM дискретизације проблема, при чему су CFD субрутине могле да решавају проблеме стишљивог и не-стишљивог, вискозног (ламинарног и турбулентног) и не-вискозног струјања флуида. Модели који су били подржани су затворени или отворени (обструјавање). Од верзије 2017, CFD је уклоњен из *ABAQUS*-а, јер *Dassault Systemes*, фирма која је власник *ABAQUS*-а, има још 2 CFD програма: *XFlow* и *Powerflow*, који су засновани на *Laticce-Boltzmann* методи, прикладинији су за CFD, док је *ABAQUS* програм првенствено намењен решавању проблема механике чврстих тела. *XFlow* и *Powerflow* су део *Dassault*-ове *3Dexperience* платформе. *ABAQUS* може и даље да се користи за FSI анализу ако се спрегне са неким CFD солвером који развија трећа страна, и који користи тзв. "*MpCCI CouplingEnvironment*", као што су на пример *ANSYS Fluent, OpenFOAM, STAR-CD* и *STAR-CCM+*. Пример оваквог спрезања *ABAQUS*-а са програмима *OpenFOAM* и *MBDyn* можемо видети у анализи напона у композитним крилима ветрењаче [13].

Siemens-ov Simcenter *STAR-CCM+* може истовремено да врши CFD анализу коришћењем FVM и прорачун солида коришћењем FEM солвера. CFD анализа у програму *STAR-CCM+* обухвата *Reynolds Average Navier Stokes (RANS)* моделе, *Detached Eddy Simulations (DES)* и *Large Eddy Simulations (LES). STAR-CCM+* подржава анализу мулти-фазних токова, ако и мулти-физичких проблема који обухватају провођење топлоте, акустику реологију електро-магнетизам и FSI. Пример таквог прорачуна је анализа вибрација изазваних током флуда у горивним штаповима нуклеарног реактора [14].

*ADINA* има 4 основна мдула: "Structures", "Thermal", "CFD", "EM" за анализу одговарајућих проблема, а чија спрега омогућава и мултифизичке симулације. Што се самог моделирања флуида тиче, у *ADINA*-и је могуће користити и FEM и FVM методу за анализу нестишљивог, квази-нестишљивог и стишљивог флуида са слободним површинама [15], а уз примену ALE формулације и за FSI анализе [16]. У *ADINA*-у су уграђени и k-ω, и k-ε модели турбуленције [17]. За разлику од претходно наведених комерцијалних мулти-физичких софтвера који се првенствено користе у индустрији, *ADINA* се, поред запажене индустријске употребе, често примењује и у биоинжењњерингу, на пример за анализу тромбо-емболизма у каротидној бифуркацији [18], вибро-акустичних ефеката изазваних стенозом у крвном суду унутар лобање [19], или абдоминалне анеуризме аорте [20].

Слично претходно описаним комерцијалним решењима, у случају академских, истраживачких и open-source програма постоји неколико стратегија за FSI анализу. Нека решења се ослањају искључиво на FEM [21], нека на FVM [22], док је ипак најпопуларнија методологија која подразумева комбиновање CFD софтвера (обично FVM) и FEM солвера за солиде помоћу спољног управљача за вишефизичко повезивање као што је на пример *preCICE* [23], који може да повеже и два солвера који нису open-source тако што ће да модификује њихове улазне и излазне фајлове [24]. Ова стратегија више није конкурентна због немогућности паралелног рачунања.

Други тип спрезања је сервер-клијент (*master-slave*) спрезање коришћењем *ICoCo* (*Interface for Code Coupling*) оквира који у суштини представља само стандард за размену података између 2 програма путем API (*Application Programming Interface*) [25]. Ова методологија подразумева да се оба кода обухвате *IcoCo* wrapper-ом, а потом да се искомпајлирају у заједничку библиотеку [25]. Потом се за интерполацију и мапирање поља користи библиотека *MEDCoupling* [25] која омогућава како секвенцијалну тако и паралелну размену података.

Још један често коришћени оквир за повезивање различитих мулти-физичких солвера, како комерцијалних, тако и академских је *MpCCI* (*Mesh-based parallel Code Coupling Interface*) [26].

Пример спрезања комерцијалних солвера *ABAQUS* и *Fluent* дат је у [27], док се слична спрега академских солвера може видети код повезивања солвера *FLOWer* за флуиде и *SIMPACK* за солиде при прорачуну деформација крила авиона [28].

Па ипак, интеграција солвера за флуиде и солиде у исти извршни код и коришћење паралелног модела програмирања омогућава најефикасније FSI симулације [29].
Такав приступ коришћен је и у програму *PAK-Multiphysics,* при чему *PAKF-Turbulelnt,* који је представљен у овом техничком решењу, представља један његов модул који може самостално да се користи или спрегнут са солвером за солиде *PAKS* за FSI прорачуне.

# 11 Детаљан опис техничког решења (укључујући и пратеће илустрације и теоретску суштину)

Ток течности у биоинжењерингу може бити ламинарни или турбулентни ток, а његов најзначајнији и највише проучаван феномен је проток крви кроз кардиоваскуларни систем. Ламинарни ток је ток у коме се слојеви течности крећу паралелно један са другим, енергетски је ефикаснији и стога представља подразумевано понашање крви. Турбулентно струјање представља неправилан вртложни ток, који настаје када брзина струјања пређе одређени праг или када се ток нагло успори услед интеракције са препрекама или промене попречног пресека крвног суда. Типични примери анализе турбулентног тока у биоинжењерингу фокусирани су на одређивање основних параметара тока флуида, као што су напон смицања на зиду, поље притиска или поље брзина флуида [30]. Крв, као основна течност у људском телу, носи хранљиве материје, кисеоник, лекове, итд, представља сложен медијум и у рачунским моделима се морају усвојити одређене апроксимације. У великим судовима (као што су нпр. каротидне артерије), ова апроксимација је направљена моделирањем крви као хомогене течности са одређеним (просечним) својствима вискозности. [31], где је молекуларни транспорт регулисан конвективно-дифузијским законима. Када се крв посматра као хомогена, вискозна, и нестишљива течност, проток у великим судовима се може описати помоћу *Navier–Stokes*-ових једначина равнотеже момента, једначине нестишљивости и коришћењем једначине равнотеже масе [32]. Више студија о дистрибуцији плака у кардиоваскуларном систему показало је да се атеросклероза углавном јавља на гранама у васкуларном стаблу, где артерије имају релативно сложену геометрију [33]. Сложена геометрија условљава ток, који је јединствен за сваког појединачног пацијента [34]. Већина прорачуна тока до сада је вршена на такозваним просечним или идеализованим геометријама. Овако добијена решења могу значајно да одступају од решења које би се добило прецизнијим моделирањем крвног суда [35]. Данас је тренд и потреба да се генеришу модели који тачно описују стварну геометрију артеријских бифуркација захваљујући напретку у области радиолошких дијагностичких уређаја и перформанси рачунара [35], [36].
У овом техничком решењу најпре ће бити дате основне математичке релације које карактеришу статистичко моделирање турбуленције. Тај приступ подразумева апроксимацију брзине флуида која се може одредити као збир просечних вредности брзине и флуктуације брзине око те вредности [37]. *Reynolds*-ове једначине се добијају применом ове методе на *Navier-Stokes*-ове једначине [38]. У овим једначинама постоје нови чланови који се називају турбулентни напони или *Reynolds*-ови напони. Проблем одређивања ових напона довео је до увођења модела турбуленције [37]. $k-\omega$ модел је успешно коришћен за предвиђање турбулентног струјања у радовима *Wilcox*-а [39], [40], али до сада није био значајније заступљен у биомеханичким и медицинским истраживањима, па је таква његова примена мотив истраживања и основа постигнутог технолошког напретка овог техничког решења. CFD анализе засноване на сликама анатомски реалистичних артеријских геометрија појавиле су се касних 1990-их користећи магнетну резонанцу или ултразвучне снимке. Данас постоји опсежна експериментална и компјутерска истраживања о патофизиологији атеросклерозе и корелацији између њене фокалне природе и локалне хемодинамике [28].
За прорачун основних физичких величина које карактеришу ток флуида примењена је имплицитна интеграција једначина. У сваком кораку инкрементално-итеративне процедуре, одређивање брзине флуида, кинетичке енергије турбуленције и дисипације турбулентне

кинетичке енергије се врши за све чворове коначних елемената [30]. Верификација методологије представљене у овом техничком решењу извршена је поређењем са експерименталним резултатима из литературе при чему је показано је да анализа са FEM и $k-\omega$ моделом има добро подударање са експерименталним резултатима [41].
У овом техничком решењу дато је коришћење $k-\omega$ модела уграђеног у напредни CFD FEM солвер *PAKF-Turbulelnt* (који је део пакета *PAK-Multiphysics*), за биоинжењерску анализу, што ће омогућити истраживачима и лекарима да проучавају и предвиде развој кардиоваскуларних стања за одређене пацијенте, и да сходно томе планирају најадекватнији третман. Овај значајан напредак у FEM анализи CFD проблема може нам дати увид како стеноза може довести до преласка са ламинарног на турбулентни ток, а последичне промене смичућег напона на зиду крвног суда могу повећати ризик од формирања плака.
У процесу тестирања *PAKF-Turbulelnt* софтвера коришћене су геометрије каротидних артерија добијене из радиолошких снимака неколико анонимних пацијената, а у овој документацији приказани су модели који су најпогоднији за демонстрацију могућности примењене технике. Након извршеног прорачуна за конкретног пацијента, дати су расподела брзине струјања крви, расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције и смичући напон на зиду које лекари могу користити за процену стања каротидне артерије пацијента.

## 11.1 Метематичко моделирање турбулентног струјања и k-ω модел

Сви турбулентни модели се у принципу састоје од *Reynolds*-ових једначина и дати су у форми модела са једном једначином или модела са две једначине који су засновани на *Boussinesq*-овој апроксимацији [42], [37]. Ова апроксимација подразумева да се члан *Reynolds*-ове једначине који садржи турбулентне напоне апроксимира кроз турбулентну динамичку вискозност.
Турбулентни $k-\omega$ модел је један од стандардних модела са две једначине који се користе за моделирање турбулентних проблема. Овај модел се први пут помиње у радовима *Wilcox*-а [38], [40]. Од тада, модел је имао одређене промене. *Wilcox*-ов побољшани k-ω модел из (2008) је унапређена верзија оригиналног *Wilcox*-овог (1988) модела који укључује додавање термина унакрсне дифузије, ограничавајући напон код вискозности вртлога и модификацију ω једначине која омогућава истезање вртлога [43]. Турбулентни модел се састоји од једначина за кинетичку енергију турбуленције и специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције. *Wilcox*-ов модел се може лако уградити у цео вискозни подслој и не захтева додатне логаритамске функције за дефинисање тока близу зидова [38], [44]. У пракси то значи да се овај модел може применити без икаквих модификација за анализу и најтурбулентнијих модела.

За овај модел теорија струјања са малим *Reynolds*-овим бројем је развијена у много облика. У радовима [45] и [46] описан је *Galerkin*-ов method са дисконтинуитетима, и дати су нумерички алгоритми за дискретизацију. Посебан акценат је стављен на дискретизацију за вискозни део турбулентног модела $k-\omega$.
*Reynolds*-ове осредњене *Navier-Stokes*-ове једначине (на енглеском *Reynolds Averaged Navier-Stokes*, са акронимом RANS који ће бити даље коришћен у овом документу) су први корак у статистичком моделирању турбуленције. Свака променљива, ако се проток флуида посматра кроз статистички просечне параметре, може се представити као збир временски осредњене (просечне) вредности тог параметра и флуктуација око те вредности. Дакле, за брзину имамо:

$$v_i\left(x_i,t\right)=\overline{v}_i\left(x_i\right)+v_i^{'}\left(x_i,t\right), \tag{1}$$

$$p=\overline{p}+p^{'}, \tag{2}$$

где се осредњена брзина $\overline{v}_i$ рачуна као:

$$\overline{v}_i\left(x_i\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T v_i\left(x_i,t\right)dt\cdot \tag{3}$$

У једначинама (1-3) су коришћени следећи параметри:
$t$ - време,
$T$ - осредњени временски интервал,
$v_i^{'}$ - флуктуација брзине око просечне вредности,
$\overline{v}_i$ - просечна вредност брзине,
$\overline{p}$ - просечан притисак у флуиду,
$p^{'}$ - флуктуација притиска око просечне вредности,
$x_i$ - глобалне координате.

*Navier-Stokes*-ова једначина и једначина континуитета модификују се просечним вредностима из једначина (1) и (2). Након тога, користи се *Boussinesq*-ова апроксимација [42] након које добијамо коначан облик RANS једначина. RANS једначине, које чине модификована *Navier-Stokes*-ова једначине и модификована једначина континуитета, дате су следећим изразима:

$$\rho\left[\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}+\overline{v}_j\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}\right]=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_{eff}\right)\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{4}$$

$$\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_i}=0\,, \tag{5}$$

где је са $\rho$ дата густина флуида, а $\mu_{eff}$ је ефективна динамичка вискозност која је збир динамичке вискозности и турбулентне динамичког вискозности:

$$\mu_{eff}=\mu+\mu_T\,. \tag{6}$$

Турбулентна динамичка вискозност унутар $k-\omega$ модела се израчунава као однос кинетичке енергије турбуленције $k$ и специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције $\omega$:

$$\mu_T=\alpha^*\frac{k}{\omega}\,. \tag{7}$$

Кинетичка енергија турбуленције $k$ према [37] може се изразизи као:

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\overline{v}_j\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\sigma^*\mu_T\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+P_k-\beta_k\rho k\omega\,, \tag{8}$$

при чему:
$k$ - представља енергију турбуленције,
$\omega$ - је специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције,
$P_k$ - је запреминска брзина прираста кинетичке енергије турбуленције и дефинисана је као:

$$P_k=\mu_T\left(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j}\,. \tag{9}$$

Специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције $\omega$ је променљива која карактерише величину турбуленције и израчунава се коришћењем следеће једначине:

$$\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+\overline{v}_j\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\sigma\mu_T\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha_k\frac{\omega}{k}P_k-\beta_\omega\rho\omega^2\,. \tag{10}$$

У једначинама (8) и (10) константе $\alpha^*$, $\alpha$, $\beta_\omega$, $\beta_k$, $\sigma$ и $\sigma^*$ имају следеће вредности [39], [40]:

$$\alpha^*=1,\quad \alpha_k=\frac{5}{9},\quad \beta_\omega=\frac{3}{40},\quad \beta_k=\frac{9}{100},\quad \sigma=\frac{1}{2},\quad \sigma^*=\frac{1}{2}\,. \tag{11}$$

На овај начин се израчунавају гранични услови зида за турбулентне величине када имамо логаритамски закон расподеле брзине у близини зида. Турбулентна кинетичка енергија на зиду $k_w$ је дата са:

$$k_w = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{\beta_k}}, \tag{12}$$

док се специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције $\omega_w$ на зиду се рачуна као:

$$\omega_w = \frac{v_\tau}{\sqrt{\beta_k \cdot \kappa \cdot \delta}}, \tag{13}$$

где:

$v_\tau = \sqrt{\tau_W / \rho}$ - представља резултујућу брзина трења,

$\tau_W$ - је смичући напон на зиду, што ће бити објашњено касније,

$\kappa = 0.42$ - је *von Kármán*-ова константа,

$\delta$ - је нормално растојање прве тачке мреже флуида од зида.

Почетна вредност кинетичке енергије турбуленције може се емпиријски израчунати преко следећег израза:

$$k_0 = \frac{3}{2}\left(\bar{v}_i I\right)^2, \tag{14}$$

где $\bar{v}_i$ представља средњу вредност почетне брзине струјања, а $I = 0.16\,\mathrm{Re}_{d_h}^{-\frac{1}{8}}$ је интензитет турбуленције.

$\mathrm{Re}_{d_h}$ је Reynolds-ов број који се одређује на основу хидрауличког пречника цеви или ширине канала. Почетна вредност специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције израчунава се као:

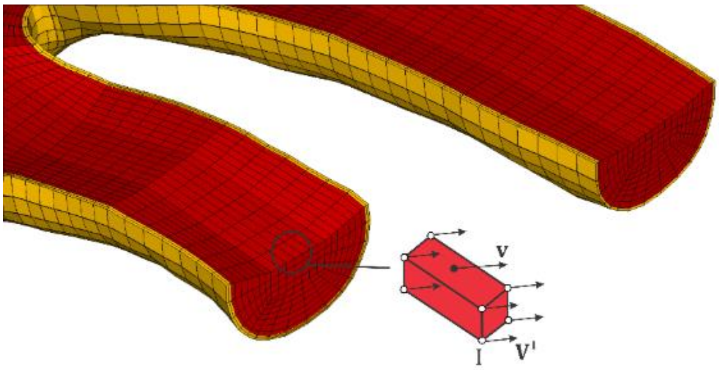
$$\omega_0 = \frac{\sqrt{k_0}}{l_T}, \tag{15}$$

где је $l_T = 0.07 d_h$ дужина турбуленција, а $d_h$ је хидраулички пречник цеви или ширина канала.

## 11.2 FEM формулација RANS једначина и k-ω модела

Као што је већ поменуто, једначине за турбулентни модел $k-\omega$ могу се применити у комплетном пољу тока укључујући и вискозни подслој. То значи да се овај модел може користити у анализи већине турбулентних проблема као што су струјање око аеродинамичких профила, струјање у турбомашини, и генерално се може применити на било који проблем са струјањем са високим *Reynolds*-овим бројем, али фокус овог техничког решења биће биомеханичка примена.

Основна идеја анализе методом коначних елемената је да се просторни физички домен подели односно дискретизује у поддомене које се називају коначни елементи. На слици 2. шематски је приказано како се овај процес одвија на примеру каротидне артерије, где је домен течности или крви посебно моделиран. Оба домена (солид и флуид) су подељена на коначне елементе преко којих се израчунавају основне физичке величине. У претходном поглављу показали смо да су RANS једначине, представљене изразима (4) и (5), основне једначине које се решавају за турбулентно струјање флуида.




**Слика 2.** Дискретизација модела коначним елементима на примеру каротидне артерије са доменима флуида и солида

Поље брзине за сваки коначни елемент **v**$(x,y,z)$ (Слика 2.) може се апроксимирати вектором брзине **v**$(r,s,t)$ где су локалне координате коначног елемента $r,s,t$ [30], [47]. Тродимензионални (3D) изопараметарски коначни елементи се користе за моделирање тродимензионалних тела општег облика (3D континуум). У основи, ова врста коначног елемента обично има 6 површина, а број чворова се креће од 8 до 21, у зависности од тога да ли се ради о елементу са међучворовима или не. 3D елементи такође укључују елементе чији се облици генеришу спајањем неких чворова, тако да се може добити облик призме, тетраедра или четворостране пирамиде. Такви елементи се називају дегенерисани 3D елементи, али о њима неће бити речи у наставку.

Основни облик 3D елемента приказан је на слици 3, [30]. Геометрија елемента и поље померања основног коначног елемента изражавају се следећим једначинама:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{HX}, \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{K=1}^{N} h_K X_i^K \equiv h_K X_i^K, \qquad i = 1,2,3; \quad K = 1,2,....,N, \tag{16}$$

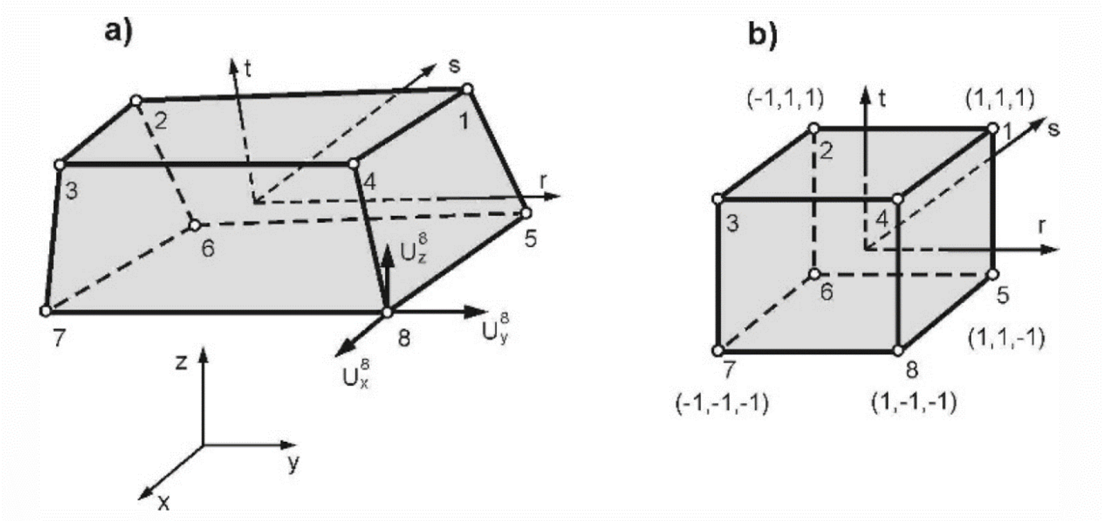
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{HU}, \quad \text{или} \quad u_i = \sum_{K=1}^{N} h_K U_i^K \equiv h_K U_i^K, \qquad i = 1,2,3; \quad K = 1,2,....,N, \tag{17}$$

gde je $\mathbf{x}$ вектор положаја материјалне тачке, а $\mathbf{u}$ представља вектор померања материјалне тачке са компонентама $u_1, u_2, u_3$. Вектор координата чвора и вектор померања чвора су дефинисани као:

$$\mathbf{X}^T = \left[ X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_1^2 X_2^2 X_3^2 \ldots\ldots X_1^N X_2^N X_3^N \right], \tag{18}$$

$$\mathbf{U}^T = \left[ U_1^1 U_2^1 U_3^1 U_1^2 U_2^2 U_3^2 \ldots\ldots U_1^N U_2^N U_3^N \right], \tag{19}$$

где су $X_i^1 \left( i = 1,2,3 \right)$ и $U_i^1$ координате и померања првог чвора, док $X_i^N$ и $U_i^N$ представљају координате и померања $N$ -тог чвора.




**Слика 3.** Тродимензионални осмоугаони елемент: а) Приказ основног 3D елемента (померања чворова су приказана само за чвор 8), б) Елемент приказан у локалном координатном систему (бројеви у заградама представљају вредности локалних координата за неки од чворова)

Укупан број чворова коначних елемената је $N$, док је у овом случају $N=8$. Интерполациона матрица $\mathbf{H}$ се може написати као:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0\cdots 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

где су $h_K(r,s,t),\ K=1,2,\ldots,8$ интерполационе функције са локалним координатама $r,s,t$. У случају коначног елемента са 8 чворова, интерполационе функције имају следећи облик:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) \qquad & h_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \\ h_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) \qquad & h_6 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\ h_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) \qquad & h_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \\ h_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \qquad & h_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \end{aligned}, \qquad (21)$$

или у следећој нотацији:

$$h_K(r,s,t)=\frac{1}{8}(1+r_K r)(1+s_K s)(1+t_K t), \qquad K=1,2,....,8, \qquad (22)$$

где су локалне координате $r_K, s_K, t_K$ за неке од чворова дате на слици 3. Локалне координате чворова имају вредност 1 или -1. Интерполационе функције имају такву особину да је $h_K=1$ у чвору $K$, док је за остале чворове $h_K=0$. Елемент са осам чворова се такође назива линеарним, јер су све интерполационе функције линеарне у зависности од локалних координата. Са Слике 3. види се да површине коначног елемента представљају равни у физичком простору. Овај коначни елемент се из Декартовог координатног система $x, y, z$ пресликава у коцку чије су локалне координате чворови $r_i, s_i, t_i$ са вредностима $\pm 1$ (Слика 3.).

Изводи интерполационих функција су представљени следећом једначином:

$$h_{K,j} = \frac{\partial h_K}{\partial x_j}. \tag{23}$$

Пошто су интерполационе функције у ствари функције локалних координата $r, s, t$ мора се применити посредно диференцирање:

$$h_{K,j} = \frac{\partial h_K}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial h_K}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial h_K}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_j}. \tag{24}$$

Јакобијан трансформације између Декартовог и локалног координатног система је:

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

где $\mathbf{r}$ представља вектор локалних координата ( $r_1 = r,\, r_2 = s,\, r_3 = t$ ). Инверзни Јакобијан се може написати као:

$$\mathbf{J}^{-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

Користећи претходне изразе, изводи интерполационих функција се могу записати у облику:

$$h_{K,j} = \frac{\partial h_K}{\partial x_j} = J_{j1}^{-1}\frac{\partial h_K}{\partial r} + J_{j2}^{-1}\frac{\partial h_K}{\partial s} + J_{j3}^{-1}\frac{\partial h_K}{\partial t}, \tag{27}$$

где су $K = 1, 2, ...., N;\, i, j = 1, 2, 3$. Изводи $\frac{\partial h_K}{\partial r}$, $\frac{\partial h_K}{\partial s}$ и $\frac{\partial h_K}{\partial t}$ израчунавају се диференцирајући изразе (21). Чланови матрице Јакобијана (25) могу се израчунати коришћењем интерполације за геометрију (16):

$$J_{mn} = \sum_{K=1}^{N} \frac{\partial h_K}{\partial r_m} X_n^K. \tag{28}$$

Брзина коначног елемента се може написати преко вектора брзине $\mathbf{v}$ у сваком чвору коначног елемента као:

$$v_i = \sum_{I=1}^{N} h_I V_i^I \equiv h_I V_i^I, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{HV}, \qquad i = 1, 2, 3; \quad I = 1, 2, ...., N, \tag{29}$$

где су $h_I$ интерполационе функције, $V_i^I$ су компоненте ( $x, y, z$ ) вектора брзине чвора $I$ и $N$ је укупан број чворове у коначном елементу. Једначина (4) са запреминским силама $f_i^V$ може се представити у тензорској нотацији на следећи начин:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \bar{v}_{i,j}\right) + \bar{p}_{,i} - \mu \bar{v}_{i,jj} - \mu_T \bar{v}_{i,jj} - \rho f_i^V = 0. \tag{30}$$

Ако се користи *Galerkin*-ова процедура са дисконтинуитетима на једначину (30), добија се следећи израз:

$$\rho\int_V h_{\mathrm{I}}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}dV+\rho\int_V h_{\mathrm{I}}\overline{v}_j\overline{v}_{i,j}dV+\int_V h_{\mathrm{I}}\overline{p}_{,i}dV-\int_V \mu h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,jj}dV-\int_V \mu_T h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,jj}dV-\rho\int_V h_{\mathrm{I}} f_i^V dV=0, \qquad (31)$$

Превођењем трећег, четвртог и петог интеграла у једначини (31) у збир површинских и запреминских интеграла коришћењем *Gauss*-овог правила:

$$\int_V h_{\mathrm{I}}\overline{p}_{,i}dV=\int_S h_{\mathrm{I}}\overline{p}n_i dS-\int_V h_{\mathrm{I},i}\overline{p}dV\,, \qquad (32)$$

$$\int_V \mu h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,jj}dV=\int_S \mu h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,j}n_j dS-\int_V \mu h_{\mathrm{I},j}\overline{v}_{i,j}dV\,, \qquad (33)$$

$$\int_V \mu_T h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,jj}dV=\int_S \mu_T h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,j}n_j dS-\int_V \mu_T h_{\mathrm{I},j}\overline{v}_{i,j}dV\,, \qquad (34)$$

добија се следећи облик једначине (31).

$$\begin{aligned}&\rho\int_V h_{\mathrm{I}}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}dV+\rho\int_V h_{\mathrm{I}}\overline{v}_j\overline{v}_{i,j}dV+\int_S h_{\mathrm{I}}\overline{p}n_i dS-\int_V h_{\mathrm{I},i}\overline{p}dV-\int_S \mu h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,j}n_j dS+\int_V \mu h_{\mathrm{I},j}\overline{v}_{i,j}dV-\\&-\int_S \mu_T h_{\mathrm{I}}\overline{v}_{i,j}n_j dS+\int_V \mu_T h_{\mathrm{I},j}\overline{v}_{i,j}dV-\rho\int_V h_{\mathrm{I}} f_i^V dV=0\end{aligned}\,. \qquad (35)$$

Површински интеграли и запреминске силе на левој страни једначине (35) се преносе на десну страну тако да једначина постаје:

$$\begin{aligned}&\rho\int_V h_{\mathrm{I}}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}dV+\rho\int_V h_{\mathrm{I}}\overline{v}_j\overline{v}_{i,j}dV-\int_V h_{\mathrm{I},i}\overline{p}dV+\int_V(\mu+\mu_T)h_{\mathrm{I},j}\overline{v}_{i,j}dV=\rho\int_V h_{\mathrm{I}} f_i^V dV+\\&+\int_S h_{\mathrm{I}}\left[-\overline{p}n_i+(\mu+\mu_T)\overline{v}_{i,j}n_j\right]dS\end{aligned}\,. \qquad (36)$$

Ако се уведу интерполационе функције за брзину и притисак флуида:

$$\overline{v}_i=h_{\mathrm{I}}\overline{V_i^{\mathrm{I}}}\,, \qquad (37)$$

$$\overline{p}_i=h_{\mathrm{I}}P_{\mathrm{I}}, \qquad (38)$$

онда се једначина (36) трансформише у следећи облик:

$$\begin{aligned}&\left[\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}dV\right]\dot{\overline{V_i^{\mathrm{I}}}}+\left[\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{K}}\overline{V_j}^{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J},j}dV\right]\overline{V_i^{\mathrm{I}}}-\left[\int_V h_{\mathrm{I},i}h_{\mathrm{J}}dV\right]P_{\mathrm{I}}+\left[\int_V(\mu+\mu_T)h_{\mathrm{I},j}h_{\mathrm{J},j}dV\right]\overline{V_i^{\mathrm{I}}}=\\&\rho\int_V h_{\mathrm{I}} f_i^V dV+\int_S h_{\mathrm{I}}\left[-\overline{p}n_i+(\mu+\mu_T)\overline{v}_{i,j}n_j\right]dS,\end{aligned} \qquad (39)$$

или у матричном облику:

$$[\mathbf{M}][\dot{\mathbf{V}}]+[\mathbf{K}_{\mathrm{vv}}+\mathbf{K}_{\mu\mathrm{v}}][\mathbf{V}]+[\mathbf{K}_{\mathrm{vp}}][\mathbf{P}]=[\mathbf{F}_{\mathrm{v}}+\mathbf{F}_{\mathrm{s}}]\,. \qquad (40)$$

Вектор брзине елемента $\mathbf{V}$ састоји се од подвектора:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}=\left[\mathbf{V}_1^{\mathrm{T}}\ \mathbf{V}_2^{\mathrm{T}}\ \mathbf{V}_3^{\mathrm{T}}\right], \qquad (41)$$

где су подвектори:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}=\left[\mathbf{V}_{\mathrm{i}}^{1}\ \mathbf{V}_{\mathrm{i}}^{2}\ \ldots\ \mathbf{V}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}\right], \qquad (42)$$

где је $N$ број чворова у елемленту. Матрице $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}_{\mathrm{vv}}$ и $\mathbf{K}_{\mathrm{vp}}$, као и вектор $\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$ деле се на одговарајуће подматрице и подвекторе:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{M}} & 0 & 0\\ 0 & \bar{\mathbf{M}} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{M}}\end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{vv}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{K}}_{\mathrm{vv}} & 0 & 0\\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{\mathrm{vv}} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{\mathrm{vv}}\end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{vp}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\mathrm{vp1}}\\ \mathbf{K}_{\mathrm{vp2}}\\ \mathbf{K}_{\mathrm{vp3}}\end{bmatrix}, \tag{45}$$

$$\mathbf{K}_{\mu\mathrm{vt}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{K}}_{\mu\mathrm{vt}} & 0 & 0\\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{\mu\mathrm{vt}} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{\mu\mathrm{vt}}\end{bmatrix}, \tag{46}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{\mathrm{v1}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{F}_{\mathrm{v2}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{F}_{\mathrm{v3}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{\mathrm{s1}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{F}_{\mathrm{s2}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{F}_{\mathrm{s3}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}. \tag{48}$$

Компоненте ових подматрица и подвектора су:

$$\left(\bar{\mathbf{M}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}dV=\rho\int_V \mathbf{H}^T\mathbf{H}dV\,, \tag{49}$$

$$\left(\bar{\mathbf{K}}_{\mathrm{vv}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{K}}\overline{V_j}^{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J},j}dV=\rho\int_V \mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{V}_1\mathbf{H}_{,x_1}+\mathbf{H}\mathbf{V}_2\mathbf{H}_{,x_2}+\mathbf{H}\mathbf{V}_3\mathbf{H}_{,x_3}\right), \tag{50}$$

$$\left(\bar{\mathbf{K}}_{\mu\mathrm{vt}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\int_V\left(\mu+\mu_T\right)h_{\mathrm{I},j}h_{\mathrm{J},j}dV=\int_V\left(\mu+\mu_T\right)\left(\mathbf{H}_{,x_1}^T\mathbf{H}_{,x_1}+\mathbf{H}_{,x_2}^T\mathbf{H}_{,x_2}+\mathbf{H}_{,x_3}^T\mathbf{H}_{,x_3}\right), \tag{51}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\mathrm{vpi}}\right)_{\mathrm{IJ}}=-\int_V h_{\mathrm{I},i}\widehat{h}_{\mathrm{J}}dV=-\int_V \mathbf{H}_{,x}^T\widehat{\mathbf{H}}dV\,, \tag{52}$$

$$\left(\mathbf{F}_{\mathrm{vi}}\right)_{\mathrm{I}}=\rho\int_V h_{\mathrm{I}}f_i^V dV=\rho\int_V \mathbf{H}^T\mathbf{f}_{\mathbf{i}}^V dV\,, \tag{53}$$

$$\left(\mathbf{F}_{\mathrm{si}}\right)_{\mathrm{I}}=\int_S h_{\mathrm{I}}\left[-\bar{p}n_i+\left(\mu+\mu_T\right)\overline{V_{i,j}}^{\mathrm{I}}n_j\right]dS=\int_S \mathbf{H}^T\left(-p\mathbf{n}+\left(\mu+\mu_T\right)\mathbf{V}_{,x}\cdot\mathbf{n}\right)dS\,, \tag{54}$$

где је $\left(\bar{\mathbf{M}}\right)_{\mathrm{IJ}}$ матрица маса, $\left(\bar{\mathbf{K}}_{\mathrm{vv}}\right)_{\mathrm{IJ}}$ конвективна матрица, $\left(\bar{\mathbf{K}}_{\mu\mathrm{vt}}\right)_{\mathrm{IJ}}$ матрица вискозних чланова, $\left(\mathbf{K}_{\mathrm{vpi}}\right)_{\mathrm{IJ}}$ матрица градијента притиска, $\left(\mathbf{F}_{\mathrm{vi}}\right)_{\mathrm{I}}$ вектор запреминске силе и $\left(\mathbf{F}_{\mathrm{si}}\right)_{\mathrm{I}}$ вектор површинске силе. Једначина (5) коришћењем *Galerkin*-ове процедура са дисконтинуитетима постаје:

$$\int_V h_{\mathrm{I}}\bar{v}_{i,j}dV=0\,. \tag{55}$$

Заменом функције интерполације брзине (33) добија се следећи израз:

$$\left[\int_V h_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{I},j} dV\right] \overline{V_i^{\mathrm{I}}} = 0\,, \tag{56}$$

где се члан у угластим заградама може представити као матрица:

$$\left(\mathbf{K}_{\mathrm{vpi}}{}^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{IJ}} = \int_V \hat{h}_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{I},j} dV\,. \tag{57}$$

Једначина (57) у матричном облику може се представити са:

$$\left[\mathbf{K}_{\mathrm{vp}}{}^{\mathrm{T}}\right]\left[\mathbf{V}\right] = 0\,. \tag{58}$$

Ако се једначине (40) и (58) групишу, добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{vv}} + \mathbf{K}_{\mu\mathrm{vt}} & \mathbf{K}_{\mathrm{vp}} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{vp}}{}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathrm{v}} + \mathbf{F}_{\mathrm{s}} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Једначина за кинетичку енергију турбуленције $k$ турбулентног модела $k-\omega$ се добија множењем једначине (8) са густином $\rho$ и може се записати у тензорском запису као:

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j k_{,j}\right) = \left(\mu k_{,j}\right)_{,j} + \left(\sigma^* \mu_T k_{,j}\right)_{,j} + \mu_T\left(\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}\right) - \beta_k \rho k \omega\,. \tag{60}$$

Члан $\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}$ на десној страни једначине (60) може се написати у следећем облику погоднијем за даљу имплементацију:

$$\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j} = 2\left(\bar{v}_{i,j}\right)^2. \tag{61}$$

Увођењем помоћног параметра $\theta = \dfrac{\omega}{k}$ добија се да једначине модела не морају да буду спрегнуте једна са другом, тако да претходна једначина има следећи облик:

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j k_{,j}\right) = \left(\left(\mu + \sigma^* \mu_T\right) k_{,j}\right)_{,j} + 2\mu_T\left(\bar{v}_{i,j}\right)^2 - \beta_k \rho k^2 \theta\,. \tag{62}$$

Ако се уведе интерполациона функција за $k$ и коришћењем (37):

$$k = h_{\mathrm{I}} k^{\mathrm{I}}\,, \tag{63}$$

и применом *Galerkin*-ове процедуре на једначину (60), добија се следећи израз:

$$\begin{aligned} &\rho\int_V h_{\mathrm{I}} \frac{\partial k}{\partial t} dV + \rho\int_V h_{\mathrm{I}} \bar{v}_j k_{,j} dV = \int_V \left(\mu + \sigma^* \mu_T\right) h_{\mathrm{I}} \left(k_{,j}\right)_{,j} dV + \\ &+ 2\int_V \mu_T h_{\mathrm{I}} \left(\bar{v}_{i,j}\right)^2 dV - \rho\beta_k \int_V h_{\mathrm{I}} k^2 \theta dV \end{aligned}\,. \tag{64}$$

Применом *Gauss*-ове теореме и груписањем површинских интеграла на десну страну једначине добијамо следеће:

$$\begin{aligned} &\left[\rho\int_V h_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{J}} dV\right] \dot{k}^{\mathrm{I}} + \left[\rho\int_V h_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{J}} \overline{V_i^{\mathrm{J}}} h_{\mathrm{I},j} dV\right] k^{\mathrm{I}} + \left[\int_V \left(\mu + \sigma^* \mu_T\right) h_{\mathrm{I},j} h_{\mathrm{J},j} dV\right] k^{\mathrm{I}} + \\ &+ \left[\rho\beta_k \theta \int_V h_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{J}} h_{\mathrm{K}} k^{\mathrm{J}} dV\right] k^{\mathrm{I}} - \left[2\int_V \mu_T h_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{J},j} \overline{V_i^{\mathrm{J}}} h_{\mathrm{K},j} dV\right] \overline{V_i^{\mathrm{K}}} = \left(\mu + \sigma^* \mu_T\right) \int_S h_{\mathrm{I}} k_{,j} n_j dS \end{aligned}\,. \tag{65}$$

Претходна једначина се може представити у матричном облику као:

$$\left[\mathbf{M}\right]\left[\dot{\mathbf{k}}\right]+\left[\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}+\mathbf{K}_{\mathbf{MK}}+\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\mathbf{k}}\right]\left[\mathbf{k}\right]-\left[\mathbf{K}_{\mathbf{VV1}}\right]\left[\mathbf{V}\right]=\mathbf{F}_{\mathbf{SK2}}, \tag{66}$$

где су матрице и вектори дефинисани као:

$$\left(\bar{\mathbf{M}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}dV=\rho\int_V \mathbf{H}^T\mathbf{H}dV, \tag{67}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}\overline{V_i^{\mathrm{J}}}h_{\mathrm{I},j}dV=\rho\int_V \mathbf{H}^T\left(\mathbf{HV}\right)\nabla^T\mathbf{H}dV, \tag{68}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{MK}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\int_V\left(\mu+\sigma^*\mu_T\right)h_{\mathrm{I},j}h_{\mathrm{J},j}dV=\int_V\left(\mu+\sigma^*\mu_T\right)\nabla\mathbf{H}^T\nabla^T\mathbf{H}dV, \tag{69}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\mathbf{k}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\rho\beta_k\theta\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}h_{\mathrm{K}}k^{\mathrm{J}}dV=\rho\beta_k\theta\int_V \mathbf{H}^T\mathbf{H}\left(\mathbf{Hk}\right)dV, \tag{70}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{VV1}}\right)_{\mathrm{IJ}}=2\int_V \mu_T h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J},j}\overline{V_i^{\mathrm{J}}}h_{\mathrm{K},j}dV=2\int_V \mu_T\mathbf{H}^T\left(\nabla\mathbf{HV}\right)\nabla^T\mathbf{H}dV, \tag{71}$$

$$\left(\mathbf{F}_{\mathbf{SK2}}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\mu+\sigma^*\mu_T\right)\int_S h_{\mathrm{I}}k_{,j}n_j dS=\left(\mu+\sigma^*\mu_T\right)\int_S \mathbf{H}^T\mathbf{k}_{,\mathrm{x}}\cdot\mathbf{n}dS. \tag{72}$$

Једначина за специфичну дисипацију кинетичке енергије турбуленције $\omega$ је изведена множењем једначине (10) са густином $\rho$ и записана у тензорској нотацији као:

$$\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+\bar{v}_j\omega_{,j}\right)=\left(\mu\omega_{,j}\right)_{,j}+\left(\sigma\mu_T\omega_{,j}\right)_{,j}+\alpha_k\frac{\omega}{k}\mu_T\left(\bar{v}_{i,jj}\cdot\bar{v}_{i,j}\right)-\beta_\omega\rho\omega^2. \tag{73}$$

Интерполациона функција за специфичну дисипацију кинетичке енергије турбуленције може се записати као:

$$\omega=h_{\mathrm{I}}\omega^{\mathrm{I}}, \tag{74}$$

Применом *Galerkin*-ове процедуре на једначину (73) и груписањем површинског интеграла у десну страну једначине добијамо следећи израз:

$$\begin{gathered}\left[\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}dV\right]\dot{\omega}^{\mathrm{I}}+\left[\rho\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}\overline{V_i^{\mathrm{J}}}h_{\mathrm{I},j}dV\right]\omega^{\mathrm{I}}+\left[\int_V\left(\mu+\sigma\mu_T\right)h_{\mathrm{I},j}h_{\mathrm{J},j}dV\right]\omega^{\mathrm{I}}+\\+\left[\rho\beta_\omega\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}h_{\mathrm{K}}\omega^{\mathrm{J}}dV\right]\omega^{\mathrm{I}}-\left[2\alpha_k\theta\mu_T\int_V \mu_T h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J},j}\overline{V_i^{\mathrm{J}}}h_{\mathrm{K},j}dV\right]\overline{V_i^{\mathrm{K}}}=\left(\mu+\sigma\mu_T\right)\int_S h_{\mathrm{I}}\omega_{,j}n_j dS.\end{gathered} \tag{75}$$

Претходна једначина се може представити у матричном облику као:

$$\left[\mathbf{M}\right]\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}\right]+\left[\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}+\mathbf{K}_{\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta\omega}}\right]\left[\boldsymbol{\omega}\right]-\left[\mathbf{K}_{\mathbf{VV2}}\right]\left[\mathbf{V}\right]=\mathbf{F}_{\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}}. \tag{76}$$

Матрице $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}$ су дефинисане изразима (67), (68), док су остале матрице и вектори дефинисани као:

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\left[\int_V\left(\mu+\sigma\mu_T\right)h_{\mathrm{I},j}h_{\mathrm{J},j}dV\right]=\int_V\left(\mu+\sigma\mu_T\right)\nabla\mathbf{H}^T\nabla^T\mathbf{H}dV, \tag{77}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta\omega}}\right)_{\mathrm{IJ}}=\rho\beta_\omega\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J}}h_{\mathrm{K}}\omega^{\mathrm{J}}dV=\rho\beta_\omega\int_V \mathbf{H}^T\mathbf{H}\left(\mathbf{H}\boldsymbol{\omega}\right)dV, \tag{78}$$

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{VV2}}\right)_{\mathrm{IJ}}=2\alpha_k\theta\mu_T\int_V h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{J},j}\overline{V_i^{\mathrm{J}}}h_{\mathrm{K},j}dV=2\alpha_k\theta\mu_T\int_V \mathbf{H}^T\left(\nabla\mathbf{HV}\right)\nabla^T\mathbf{H}dV, \tag{79}$$

$$\left(\mathbf{F}_{\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\mu+\sigma\mu_T\right)\int_S h_{\mathrm{I}}\omega_{,j}n_j dS=\left(\mu+\sigma\mu_T\right)\int_S \mathbf{H}^T\boldsymbol{\omega}_{,\mathrm{x}}\cdot\mathbf{n}dS. \tag{80}$$

Ако се једначине (66) и (76) групишу, добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{VV1}} & \mathbf{K}_{\mathbf{VK}}+\mathbf{K}_{\mathbf{MK}}+\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\mathbf{k}} & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{VV2}} & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{VK}}+\mathbf{K}_{\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta\omega}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{\mathbf{SK2}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}. \tag{81}$$

Однос $\theta = \dfrac{\omega}{k}$ се израчунава се у сваком кораку инкрементално-итеративне процедуре, где су вредности за $\omega$ и $k$ преузете из претходног корака. Турбулентна динамичка вискозност овог турбулентног модела дата је изразом:

$$\mu_T = \alpha^* \rho \frac{k}{\omega}. \tag{82}$$

Променљиве $\mu_T$, $k$ и $\omega$ на почетку прорачуна имају почетне вредности које се добијају на основу познатих граничних услова модела. Константе $\alpha^*$, $\alpha_k$, $\beta_k$, $\beta_\omega$, $\sigma$ и $\sigma^*$ добијају се на основу израза (11).

Ако се једначине Reynolds-ове формулације (59) и једначина (81) комбинују заједно, добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{vv}}+\mathbf{K}_{\mu\mathrm{vt}} & \mathbf{K}_{\mathrm{vp}} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\mathrm{vp}}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{VV1}} & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{VK}}+\mathbf{K}_{\mathbf{MK}}+\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\mathbf{k}} & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{VV2}} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{VK}}+\mathbf{K}_{\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta\omega}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathrm{v}}+\mathbf{F}_{\mathrm{s}} \\ 0 \\ \mathbf{F}_{\mathbf{SK2}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}. \tag{83}$$

## 11.3 Инкрементално-итеративни поступак решавања једначина

Систем једначина (83) је нелинеаран, због брзине које се јављају у конвекцијском члану, па се за решавање ових једначина користи инкрементално-итеративни поступак [30]. Кинетичка енергија турбуленције, специфична дисипација турбулентне кинетичке енергије и брзина флуида на крају временског корака ( $t+\Delta t$ ) могу се израчунати као вредности из претходне итерације ( $i-1$ ) увећане за прираштај у тренутној итерацији ( $i$ ), па имамо следеће итеративне једначине:

$$^{t+\Delta t}\overline{V_i^{\mathrm{I}}} = {}^{t+\Delta t}\overline{V_i^{\mathrm{I}}}^{(i-1)} + \Delta\overline{V_i^{\mathrm{I}}}^{(i)}, \tag{84}$$

$$^{t+\Delta t}P_{\mathrm{I}} = {}^{t+\Delta t}P_{\mathrm{I}}^{(i-1)} + \Delta P_{\mathrm{I}}^{(i)}, \tag{85}$$

$$^{t+\Delta t}k^{\mathrm{I}} = {}^{t+\Delta t}k^{\mathrm{I}(i-1)} + \Delta k^{\mathrm{I}(i)}, \tag{86}$$

$$^{t+\Delta t}\omega^{\mathrm{I}} = {}^{t+\Delta t}\omega^{\mathrm{I}(i-1)} + \Delta \omega^{\mathrm{I}(i)}, \tag{87}$$

где је $i$ је тренутни број итерације. Извод променљивих по времену $\overline{V_i^{\mathrm{I}}}$, $k^{\mathrm{I}}$ и $\omega^{\mathrm{I}}$ може се писати преко *Euler*-ove шеме унапред:

$$^{t+\Delta t}\dot{\overline{V_i^{\mathrm{I}}}} = \frac{^{t+\Delta t}\overline{V_i^{\mathrm{I}}} - {}^{t}\overline{V_i^{\mathrm{I}}}}{\Delta t} = \frac{^{t+\Delta t}\overline{V_i^{\mathrm{I}}}^{(i-1)} + \Delta\overline{V_i^{\mathrm{I}}}^{(i)} - {}^{t}\overline{V_i^{\mathrm{I}}}}{\Delta t}, \tag{88}$$

$$^{t+\Delta t}\dot{k}^{\mathrm{I}} = \frac{^{t+\Delta t}k^{\mathrm{I}} - {}^{t}k^{\mathrm{I}}}{\Delta t} = \frac{^{t+\Delta t}k^{\mathrm{I}(i-1)} + \Delta k^{\mathrm{I}(i)} - {}^{t}k^{\mathrm{I}}}{\Delta t}, \tag{89}$$

$$ {}^{t+\Delta t}\dot{\omega}^{\mathrm{I}} = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega^{\mathrm{I}} - {}^{t}\omega^{\mathrm{I}}}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega^{\mathrm{I}(i-1)} + \Delta\omega^{\mathrm{I}(i)} - {}^{t}\omega^{\mathrm{I}}}{\Delta t}, \tag{90} $$

Ако убацимо једначине (84), (85) и (88) у једначину (59) добијамо следеће итеративно-инкременталне једначине:

$$ \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathrm{vv}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mu\mathrm{vt}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{J}_{\mathrm{vv}}{}^{(i-1)} & \mathbf{K}_{\mathrm{vp}} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{vp}}{}^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{P}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{B}}{}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{P}}{}^{(i-1)} \end{Bmatrix}. \tag{91} $$

За турбулентне величине, ако убацимо једначине (84), (86) и (87) са кедначинама (88), (89) и (90) у једначину (83) добијамо следећу једначину:

$$ \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{KV}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VVK}}{}^{(i-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{MK}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\mathbf{k}}{}^{(i-1)} & 0 \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\omega}\mathbf{V}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VV}\boldsymbol{\omega}}{}^{(i-1)} & 0 & \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}}{}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta\omega}}{}^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{k}^{(i)} \\ \Delta\boldsymbol{\omega}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\mathbf{V}}{}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\mathbf{K}}{}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\omega}}{}^{(i-1)} \end{Bmatrix}. \tag{92} $$

Алгоритам спајања RANS једначина и турбулентног модела $k-\omega$ може се представити на следећи начин.

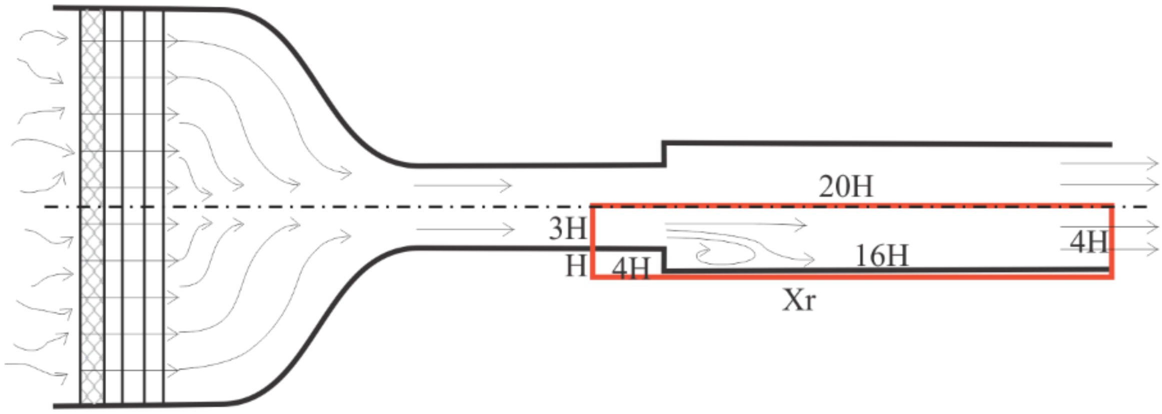
1. Иницијализација и прорачун параметара за турбулентно струјање (нпр. почетна динамичка турбулентна вискозност $\mu_{T0}$, почетна кинетичка енергија турбуленције $k_0$, специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције $\omega_0$, дужина турбуленције $l_T$ )
2. Почетак петље: Решавање RANS једначина (са динамичком турбулентном вискозношћу из претходног корака ${}^{t+\Delta t}\mu_T{}^{(i-1)}$ ).
3. Решавање једначина $k-\omega$ модела (уз коришћење брзине флуида из претходног корака ${}^{t+\Delta t}\left(\overline{V_j^{\mathrm{I}}}\right)^{(i-1)}$ израчунавање динамичке турбулентне вискозности у текућем кораку ${}^{t+\Delta t}\mu_T{}^{(i)}$ ).

Крај петље.

Кораци 2 и 3 се понављају све док прорачун не дође до завршног корака симулације. Након тога, резултати се чувају у одговарајућим излазним датотекама, за приказ и анализу у софтверу за пост-процесирање.

## 11.4 Валидација имплементације RANS једначина и k-ω модела у FEM солвер *PAKF-Turbulelnt* поређењем са стандардним референтним примером струјања флуида у тунелу са степеником

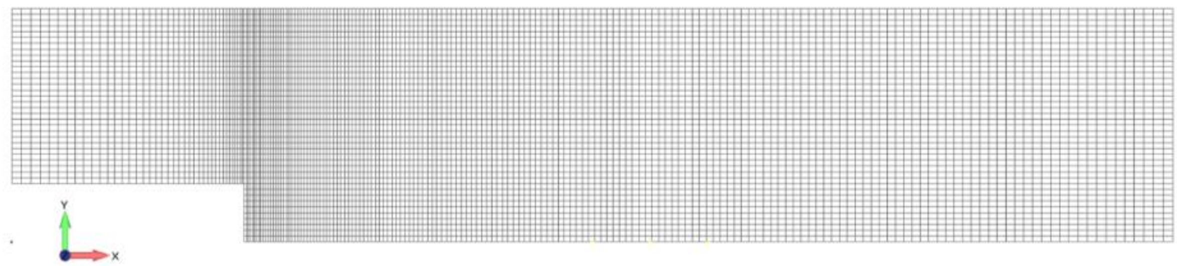
Модул за турбулентно струјање флуида тестиран је на доста коришћеном бенчмарк примеру – струјање у тунелу са степеником [48] чија је геометрија дата у [49] и представљена је на слици 4.



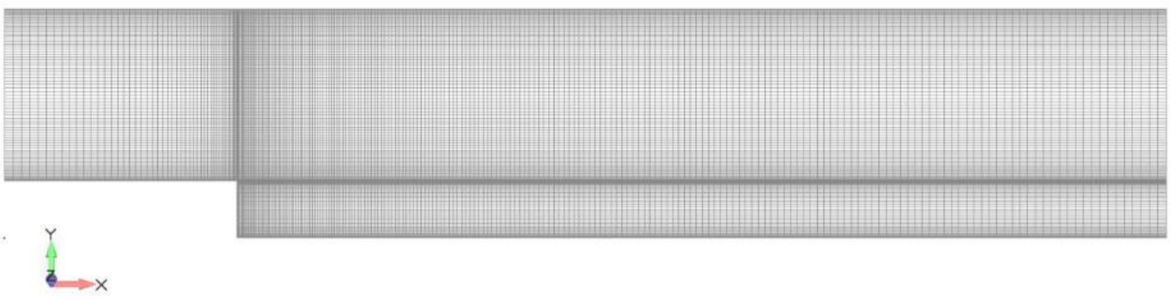

**Слика 4.** Геометрија модела тунела са степеником

У овом моделу, услед наглог повећања попречног пресека тунела, долази до формирања вртлога иза степеника, као што је илустровано на слици 4. Део тунела са левком, који служи за формирање ламинарног режима струјања, и који се налази пре степеника се не анализира. Због услова симетрије, моделирана је само половина тунела са степеником означена црвеним правоугаоником на слици 4. Степеник има релативну висину *H*, а његова релативна дужина је 4*H* [49]. Укупна дужина моделираног дела тунела је 20*H* [49]. Резултат који се разматра код овог проблема је растојање после ког флуид пада на дно канала, означено са *Xr* на слици 4. Величина *Xr* је експериментално одређена као 6*H* [48]. Унутар тунела налази се *Newton*-ов флуид густине $\rho = 1e^{-3} g / mm^3$ са динамичком вискозношћу $\mu = 1e^{-2} g / mms$. Проблем је симулиран са више улазних брзина, с тим што је акценат дат на брзинама при којима је Рејнолдсов број већи од 2300 и долази до турбулентног струјања. При улазној осредњеној брзини флуида од $v_{inlet} = 16666 mm / s$ добија се *Reynolds*-ov broj $\mathrm{Re} = 5000$ [48].

Гранични услови задати на моделу су да је брзина флуида на зидовима канала једнака нули и да су на излазу из канала површинске силе једнаке нули. Анализа осетљивости густине мреже извршена је симулацијама са 8000, 28000, 35000 и 50000 чворова, при чему су резултати показали да мрежа од 28000 елементата представља оптималан избор и да даље уситњавање мреже не доводи до значајније промене у пољу брзина. Почетни модел са 8000 четворочворних елемената и оптимални модел са 28000 четворочворних елемената приказани су на слици 5. и слици 6.

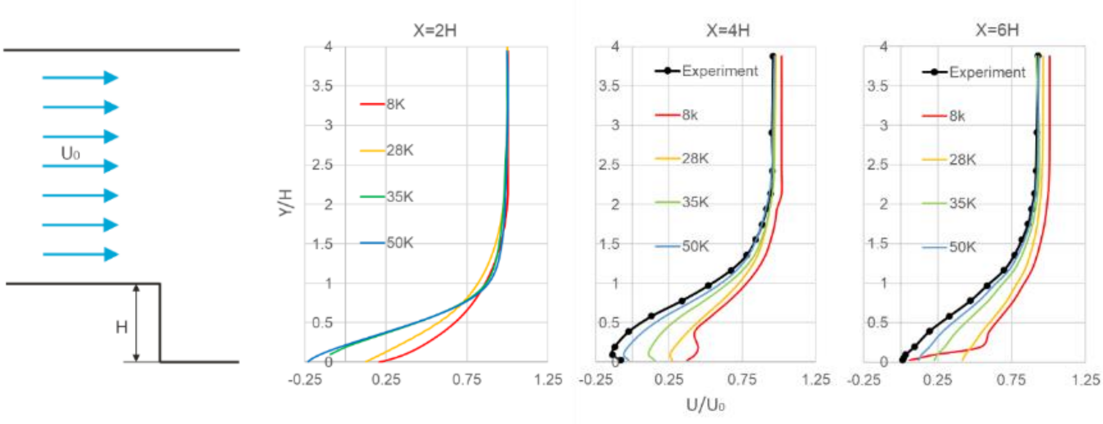


**Слика 5.** Модел коначних елемената за 2Д проблем канала са степеником, мрежа од 8000 елемената




**Слика 6.** Модел коначних елемената за 2Д проблем канала са степеником, мрежа од 28000 елемената

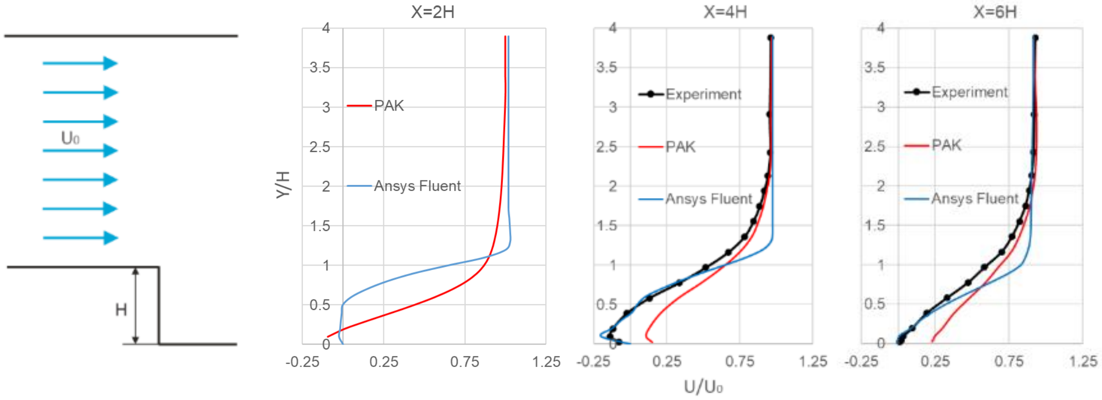
Величина елемента у сва 4 модела није уједначена, са финијим елементима распоређеним дуж зида канала и по висини и дужини степеника, како би се ухватили ефекти граничног слоја и формације великог вртлога иза степеника.
Гранични услови за улаз су просечна брзина $v_{inlet}$ , почетна турбулентна кинетичка енергија $k_0$ и специфична дисипација кинетичке енергије турубуленције $\omega_0$ рачунају се на основу једначина (14) и (15). Гранични услови на зиду за турбулентне величине $k$ и $\omega$ се добијају из једначина (12) и (13). Гранични услов на излазу је да је притисак једнак 0. FEM симулација струјања флуида у каналу са степеником коришћењем *k-ω* турбулентног модела је спроведена као нестационарна. За мрежу од 8000 елемената анализа је извршена у 100 корака по 1,0 секунди, за мрежу од 28000 елемената у 200 корака од 0,5 секунди, за мрежу од 35000 елемената у 400 корака од 0,25 секунди и за мрежу од 50000 елемената у 1000 корака од 0.1 секунди. Резултати добијени коришћењем софтвера *PAKF-Turbulent* упоређени су са доступним експерименталним резултатима **[41]** за карактеристичне дужине $X_r$ ( $2H$ , $4H$ и $6H$ ), што је приказано на слици 7.




**Слика 7.** Резултати 2Д анализе канала са степеником за карактеристичне дужине *2H, 4H* и *6H*

Дужина $X_r = 0$ одговара крају степеника. Након дужине од $6H$ од краја степеника, брзина флуида је позитивна, док је пре тога имала негативну вредност у доњем делу канала непосредно иза степеника (слика 4.). Разлог за то је вртлог који настаје у делу канала непосредно након завршетка степеника где флуид тече у смеру супротном од улазне брзине. Брзина флуида је нормализована на дијаграмима где је U брзина у приказаној тачки, а $U_0$ је просечна улазна брзина. Израчунате брзине су нормиране са улазном брзином, а Y координата посматране тачке је нормализована са висином корака H.

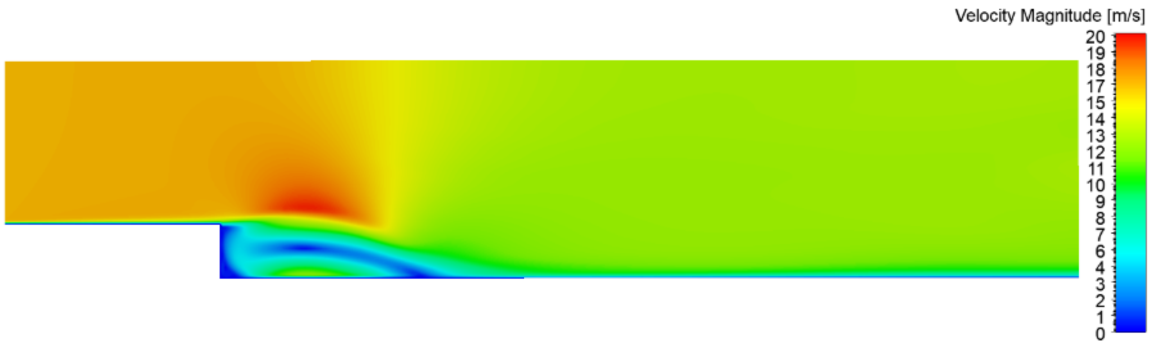
Поред тога, извршена је верификација резултата поређењем са програмом *Ansys Fluent* [50] за дужине 2H, 4H и 6H. Такође, експериментални резултати су приказани на дијаграмима за поређење са оба солвера (Слика 8).




**Слика 8.** Поређење нормираних брзина флуида добијених помоћу програма *Ansys Fluent* и *PAKF-Turbulelnt* за дужине 2H, 4H и 6H

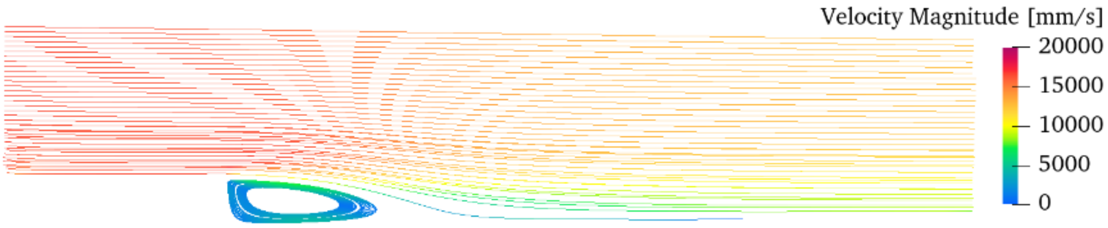
Као што се може видети са Слике 8, и *Ansys Fluent* и *PAKF-Turbulelnt* имају неке предности и недостатке и разлике у односу на експерименталне резултате. Експериментални резултати нису објављени за дужину од 2H [48], па ћемо разматрати само случајеве X=4H и X=6H. У оба случаја, *Ansys Fluent* даје боље резултате до висине степеника, након чега предвиђа веће брзине у односу на експерименталне резултате. Од висине степеника, до горње границе, *PAKF-Turbulelnt* резултати су тачнији. И *Ansys Fluent* и *PAKF-Turbulelnt* користе $k-\omega$ модел, уз једну велику рзлику: *PAKF-Turbulelnt* је FEM солвер , док је *Ansys Fluent* FVM солвер. Пошто је у оба случаја коришћена мрежа са 35000 чворова, са истим прописаним граничним условима, разлика у резултатима мора бити последица имплементације различитих нумеричких метода.
Резултати на сликама 9 и 10 показују брзину у правцу тока за модел прорачунат помоћу програма *PAKF-Turbulelnt* и одговарајуће резултате из *Ansys Fluent* програма на крају анализе (t=100s).


**Слика 9.** Поље брзина у програму *PAKF-Turbulelnt* након t=100s

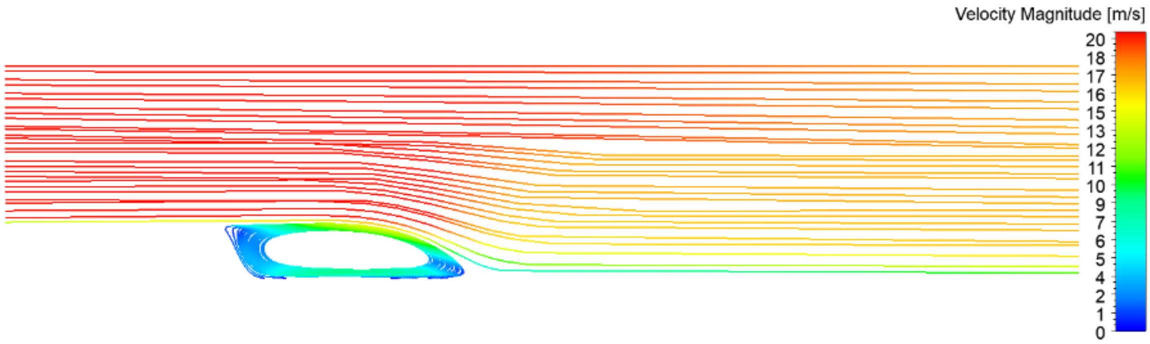



**Слика 10.** Поље брзина у програму *Ansys Fluent* након t=100s

Резултати на Сликци 11 и 12 представљају прорачунато струјање флуида помоћу струјница, добијено програмима *PAKF-Turbulelnt* и *Ansys Fluent* на почетку анализе t=1s када долази до формирања вртлога иза степеника.



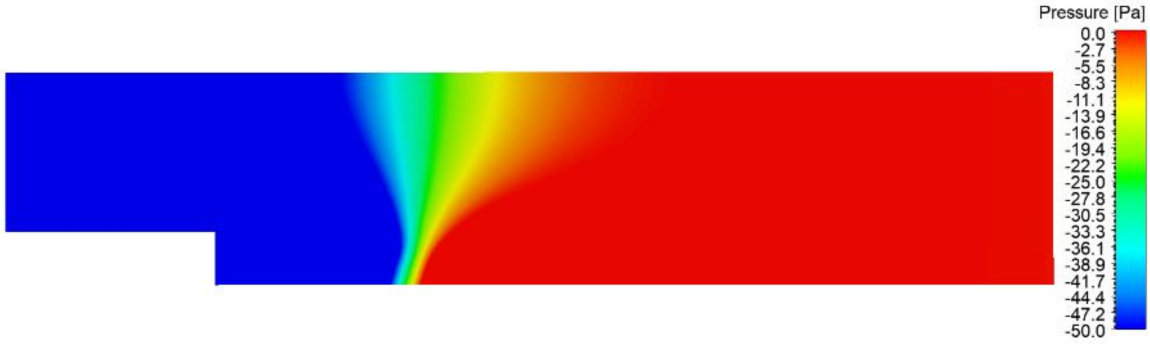

**Слика 11.** FEM резултати: струјнице добијене у програму *PAKF-Turbulelnt*




**Слика 12.** FVM резултати: струјнице добијене у програму *Ansys Fluent*

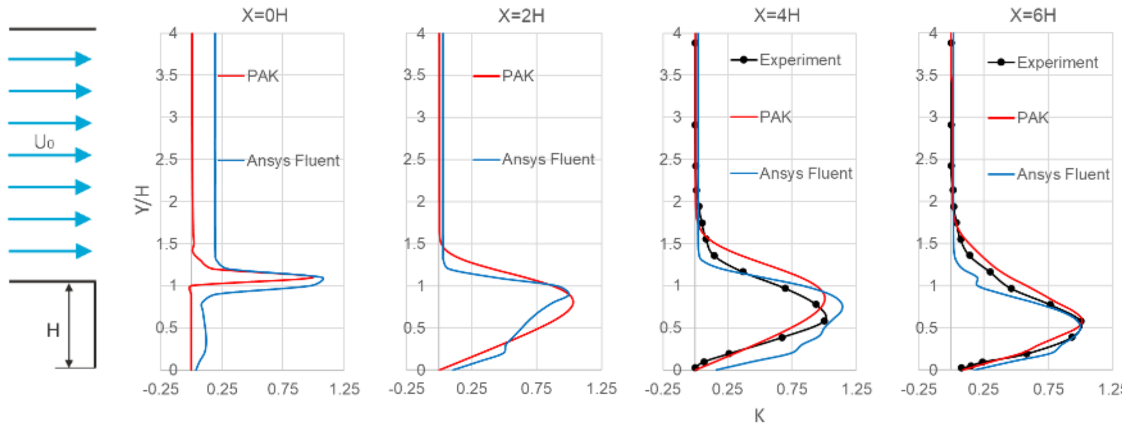
Пад притиска иза степеника на почетку анализе t=1s, израчунат помоћу програма *PAKF-Turbulelnt* и *Ansys Fluent* приказан је на слици 13 и 14.


**Слика 13.** FEM резултати: промена притиска добијена у програму *PAKF-Turbulelnt*




**Слика 14.** FVM резултати: промена притиска добијена у програму *Ansys Fluent*

Резултати симулације за кинетичку енергију турбуленције приказани су на слици 15, где је дато поређење са експерименталним резултатима из литературе за дужине $X_r$ ($4H$ и $6H$) као и нумерички резултати добијени помоћу програма *Ansys Fluent*. Поново, као што смо eћ видели са Слике 9, *Ansys Fluent* и *PAKF-Turbulelnt* имају неке предности и недостатке и одређене разлике у односу на експерименталне резултате. Оба резултата симулације се разликују од експерименталних до 5%.




**Слика 15.** Поређење кинетичких енергија турбуленције *k* добијених помоћу програма *Ansys Fluent* и *PAKF-Turbulelnt* за дужине 2H, 4H и 6H

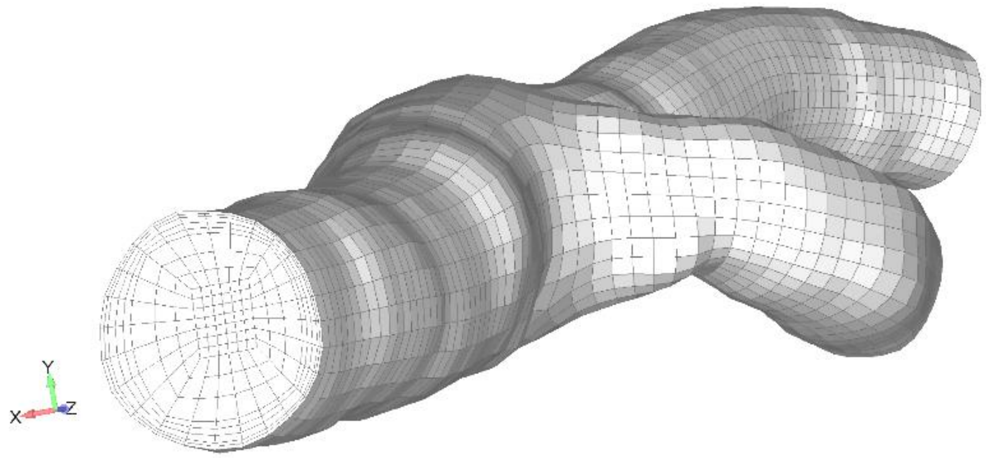
# 11.5 Верификација имплементације RANS једначина и k-ω модела у FEM солвер *PAKF-Turbulelnt* поређењем симулација турбулентног струјања крви на реалном моделу артеријске бифуркације са стенозама чија геометрија одговара специфичном пацијенту

### *10.5.1 Значај специјализоване геометрије за FEM анализу за појединачног пацијента*

Места гранања у каротидним артеријама човека су локације које су најчешће захваћене атеросклерозом, са уделом од чак 20% у кардиоваскуларним интервенцијама. Неколико студија о дистрибуцији плака у кардиоваскуларном систему су показале да атеросклероза углавном настаје на гранањима у васкуларном стаблу, где артерије имају релативно сложену геометрију [33], [51]. Сложена геометрија условљава струјање које је јединствено за сваког појединачног пацијента. Већина прорачуна струјања до сада је вршена над такозваним просечним или идеализованим геометријама. Решења која се тако добијају могу знатно одступати од решења која би се добила неким прецизнијим моделирањем крвног суда [34]. У данашње време тренд и потреба је генерисање модела који прецизно описују реалне геометрије артеријских бифуркација захваљујући помаку који је направљен на пољима уређаја за радилошку дијагностику и перформансама рачунара [35], [36].

### *10.5.2 Нумеричка симулација турбулентног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 5*

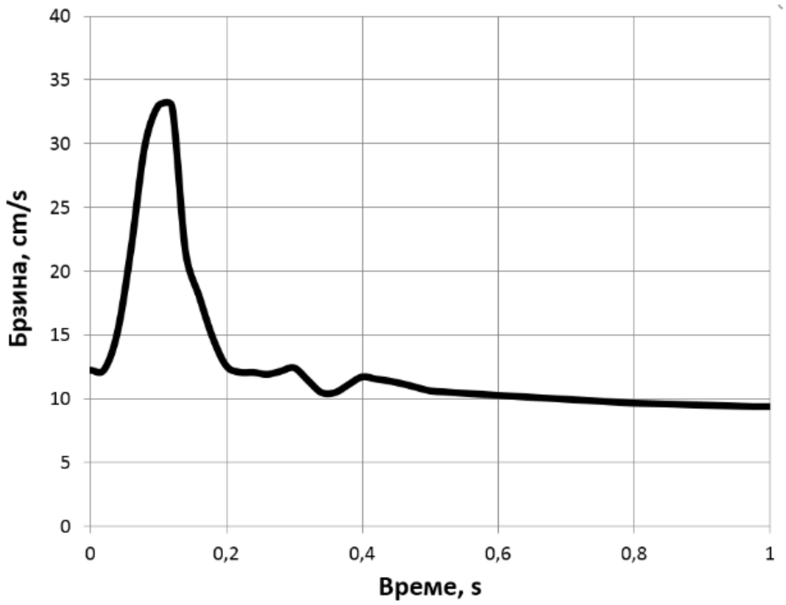
Симулација турбулентног струјања крви кроз крвни суд извршена је на реалној бифуркацији каротидне артерије изабраног пацијента 5. За прорачун је коришћен софтвер *PAKF-Turbulelnt*. Прорачун је извршен у 200 временских корака по 0.005s. FEM модел флуидног домена је моделиран са 31910 3Д елемената. На слици 16 приказан је флуидни домен који је коришћен у прорачуну. Може се видети са слике да је мрежа близу зидова веће густине због прорачуна турбулентног струјања.




**Слика 16.** Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 5

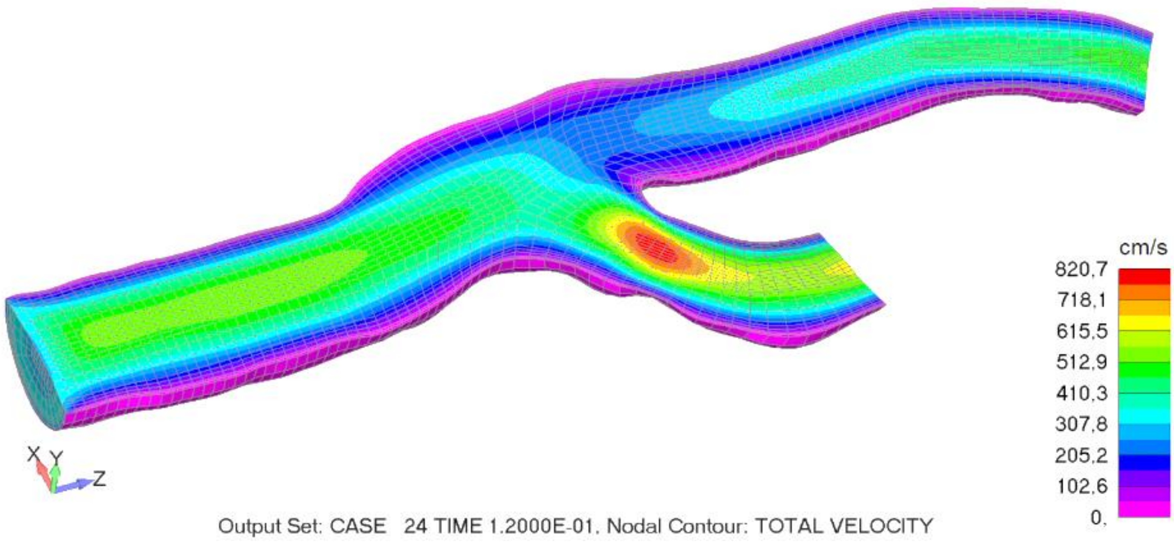
Флуид, односно крв се посматра као Њутнов флуид. Осредњена брзина струјања крви на улазу у каротидну артерију је $v_{sr}$ =300 cm/s. Рејнолдсов број у овом случају има вредност 6000 тако да је ово струјање у домену турбулентног струјања. Ова вредност брзине је узета као вредност која је 10 пута већа од неке стандардне вредности која се креће око 30 cm/s.
Ограничени су сви чворови на зиду артерије тако да нема брзине струјања, док је на излазима из артерије постављен притисак који тежи нули. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног

циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 17).

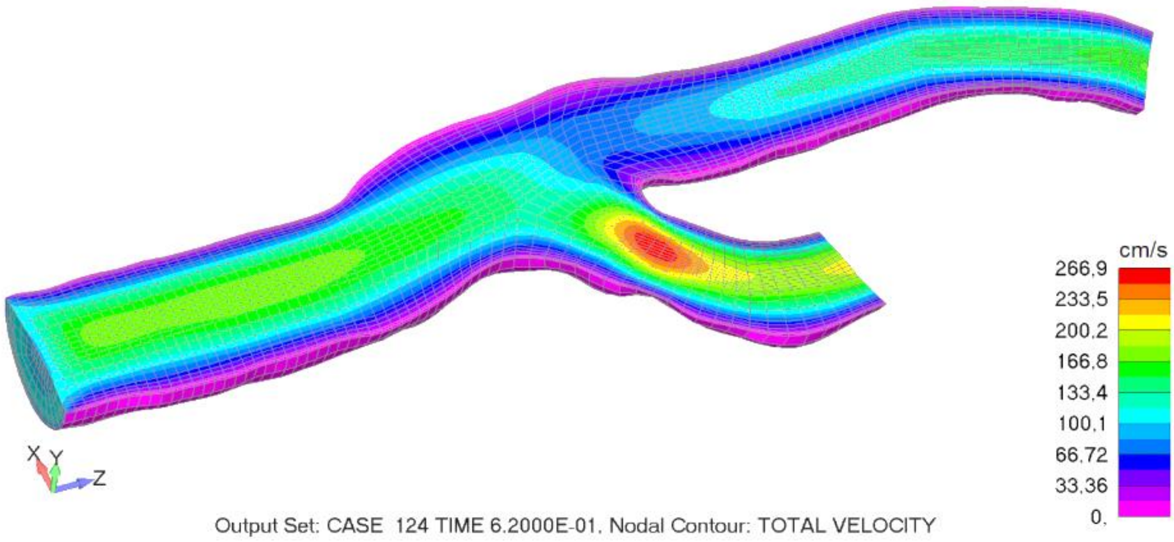



**Слика 17.** Временска функција брзине у тежишту пресека при уласку у артерију за један срчани циклус

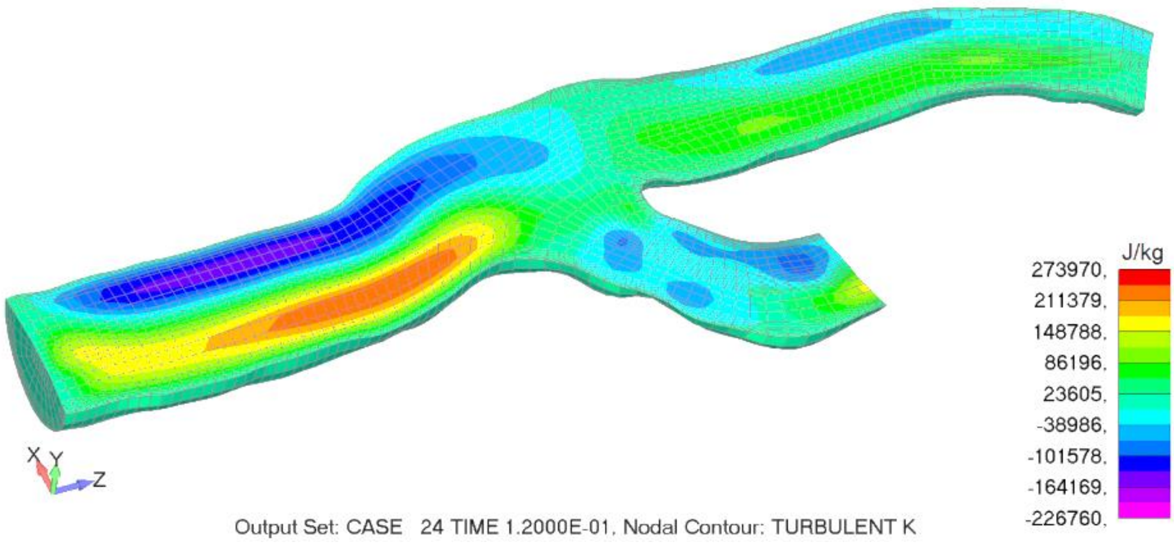
Резултати који су приказани у даљем тексту су брзина струјања флуида (слике 18 и 19), расподела кинетичке енергија турбуленције (слике 20 и 21), специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције (слике 22 и 23) и смучући напон на зиду артерије (слике 24 и 25). Најзначајнији кораци за анализу су када имамо максимум систоле (24. корак), док су за фазу дијастоле узете вредности из 124. корака. На следећим сликама где је приказана расподела брзине дуж пресека каротидне артерије може се видети да се интензитет брзине значајно повећава у делу где имамо стенозу артерије



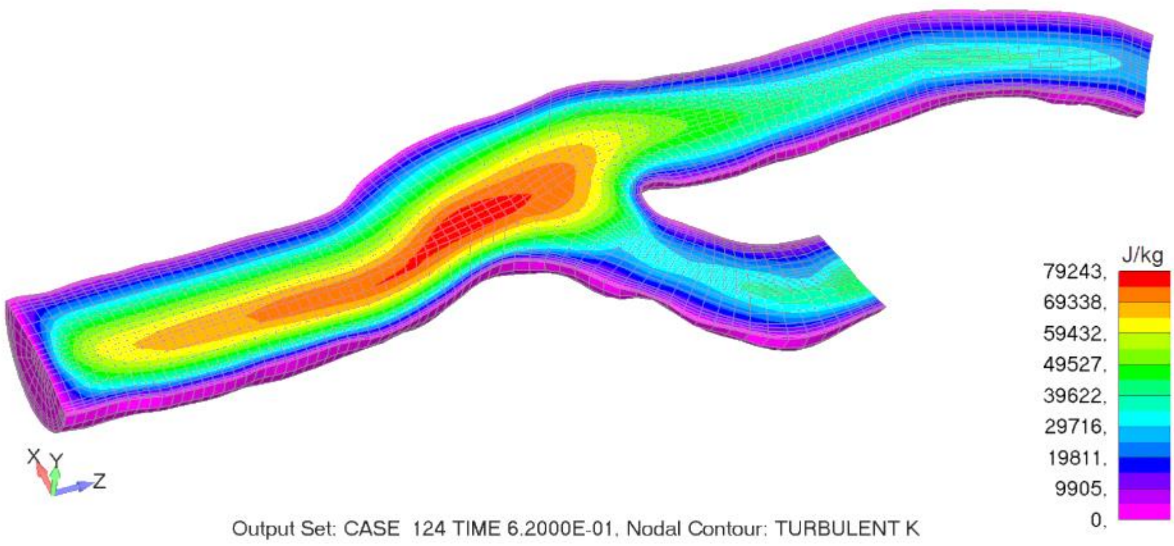

**Слика 18.** Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5



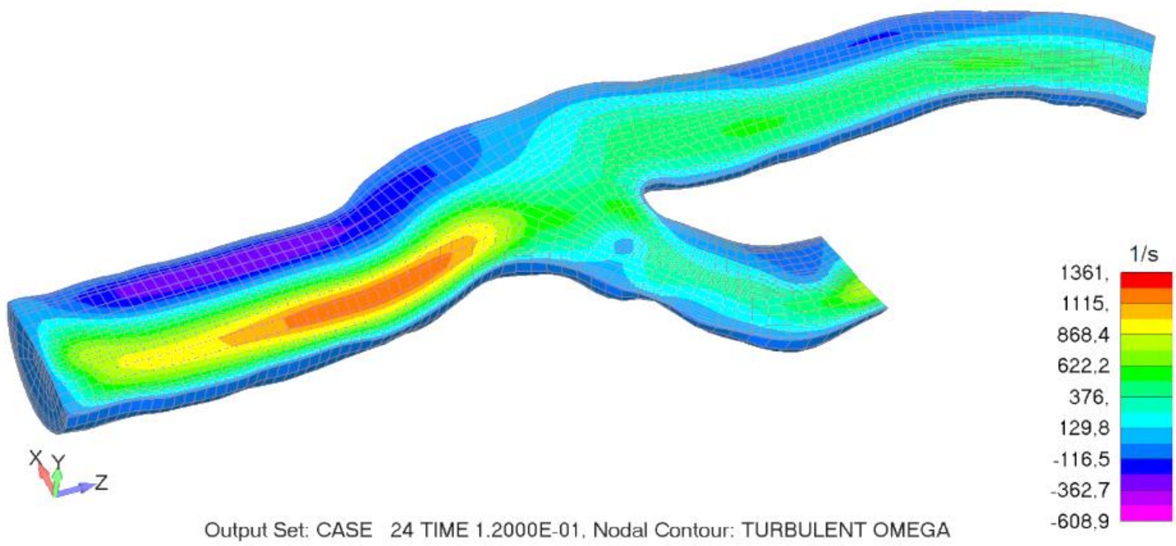

**Слика 19.** Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5



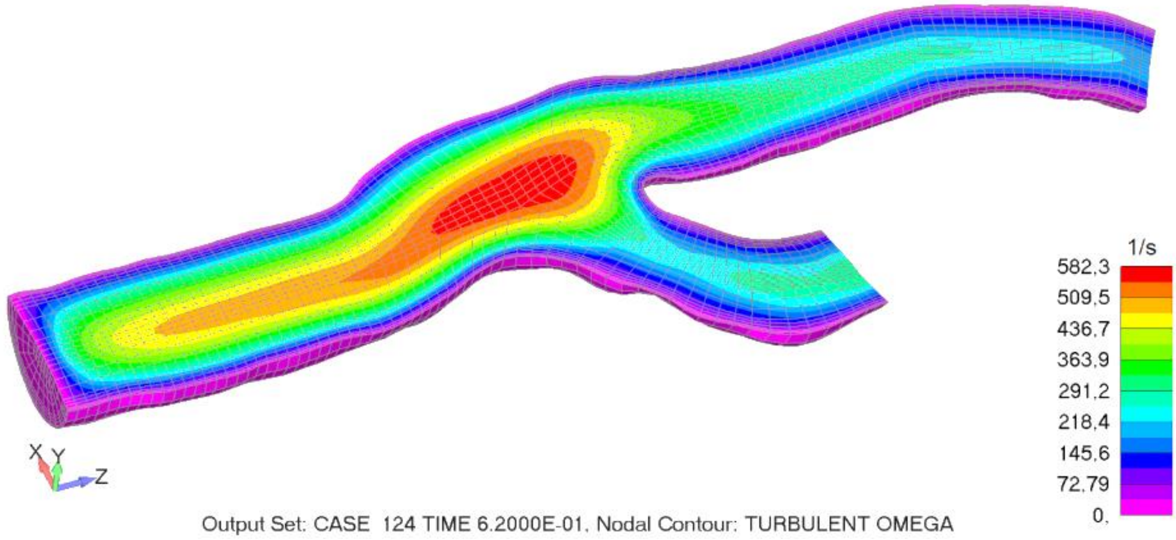

**Слика 20.** Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5




**Слика 21.** Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5

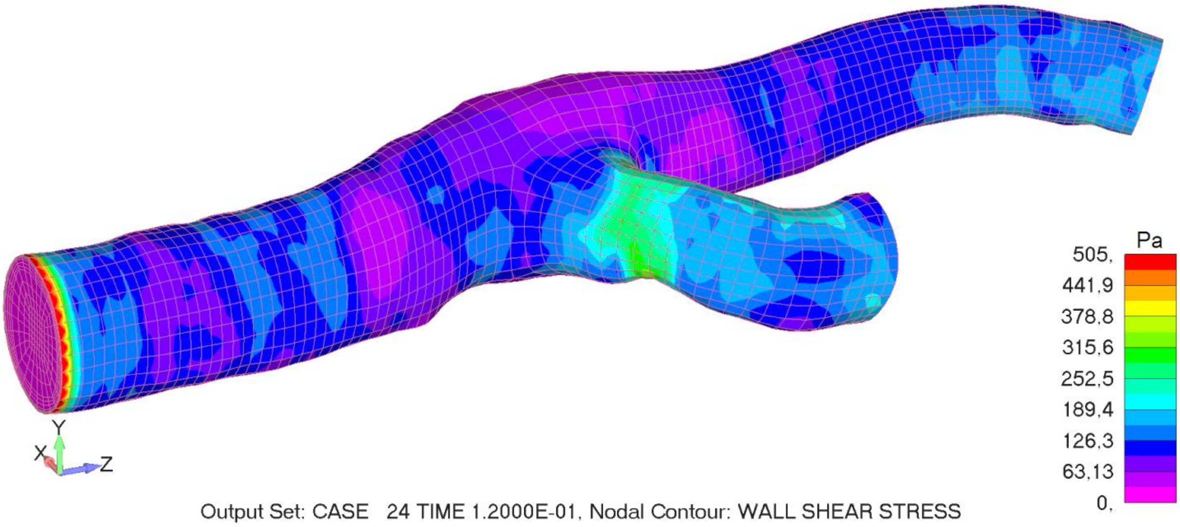



**Слика 22.** Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5

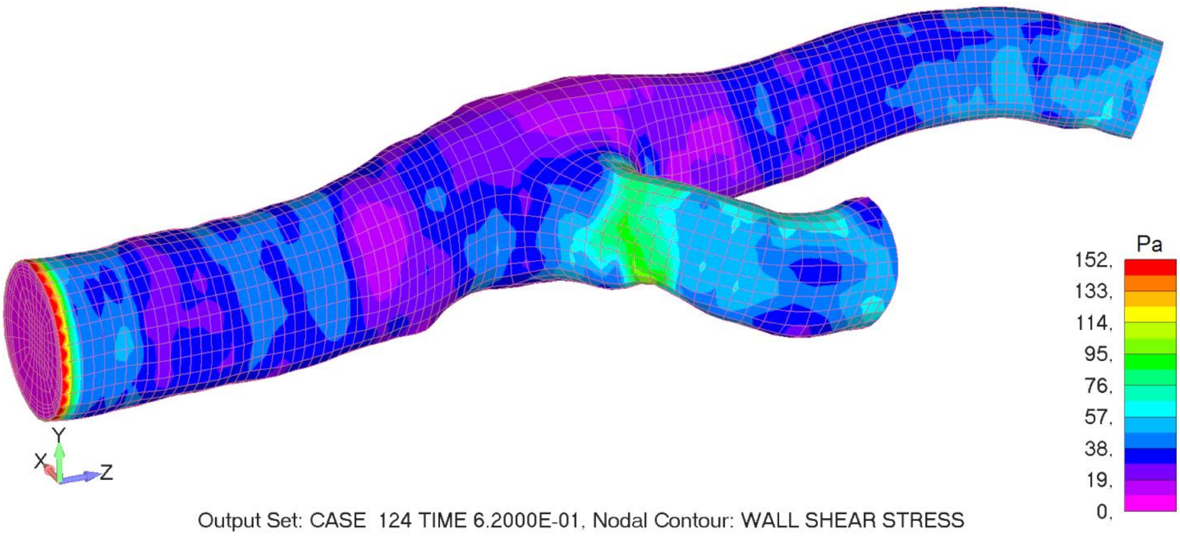



**Слика 23.** Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5

Параметри попут смичућег напона на зиду битно се мењају у делу где имамо стенозу.Смичући напон на зиду је величина која је битна за проучавање хемодинамских карактеристика каротидне бифуркације. Аналогно брзини, и смичући напон на зиду има максималне вредности за време трајања систоле.




**Слика 24.** Смичући напон на зиду каротидне бифуркације за корак 24, пацијент 5

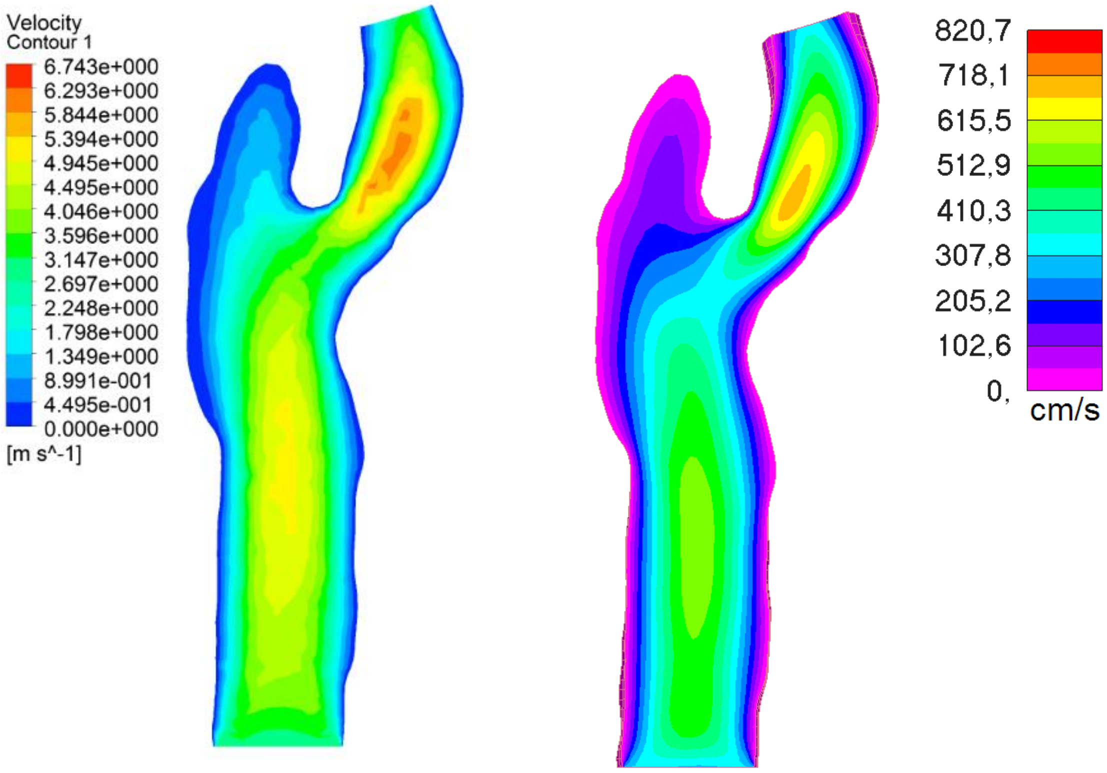



**Слика 25.** Смичући напон на зиду каротидне бифуркације за корак 124, пацијент 5

### *10.5.3 Поређење нумеричких резултата за турбулентно струјање флуида у каротидној артерији, пацијент 5*

На слици 26 а) приказани су резултати из софтвера *ANSYS Fluent*, док су на слици 26 б) приказани резултати из софтвера *PAKF-Turbulelnt*. Мрежа коначних елемената за софтвер *ANSYS Fluent* је креирана од тетраедарских елемената, док је у софтверу *PAKF-Turbulelnt* креирана од правилних хексаедарских елемената.

Може се приметити да су прелази између различитих контура доста углађенији у софтверу *PAKF-Turbulelnt*, што у суштини даје и тачније резултате. Интензитет брзине у оба случаја ако се упореде исте контуре се разликује за мање од 10% што може да буде последица различитог облика и величине коначних елемената као и софтвера у којима су извршени прорачуни.




**Слика 26.** Поређење нумеричких резултата за турбулентно струјање флуида у каротидној бифуркацији, пацијент 5, а) софтвер *ANSYS Fluent*, б) софтвер *PAKF-Turbulelnt*

# 12 Закључак

Софтвер *PAKF-Turbulelnt*, припада области научно-техничких услуга, пројектовање и развој компјутерског софтвера. Користи се у машинству за моделирање струјања флуида кроз судове променљивог профила и у биоинжењерингу за анализу тока крви кроз специфичне делове кардио-васкуларног система. *PAKF-Turbulelnt* представља имплементацију k-ω модела и RANS једначина у FEM солвер и који може самостално да се користи или спрегнут са солвером за солиде *PAKS* за FSI прорачуне.

У овом техничком решењу представљено је знатно унапређење програма PAKF уградњом k-ω модела и RANS једначина. Главна разлика у поређењу са конвенционалним солверима динамике флуида је у томе што је *PAKF-Turbulelnt* програм заснован на FEM, док већина других решења користи FVM.

Главна предност ове имплементације су углађенији прелази између контура и незнатно тачнији резултати, док је главни недостатак дуже време извршавања прорачуна.

Да би се верификовала функционалност унапређеног софвера, упоређени су резултати са резултатима добијеним комерцијалним софтверима и резултати експерименталних истраживања преузети из литературе. Резултати показују да се *PAKF-Turbulelnt* може користити за добијање сличних резултата као код верификованог и добро провереног FVM програма ANSYS Fluent.

Користећи ову имплементацију k-ω модела и RANS једначина софтвер *PAKF-Turbulelnt* биће примењен у решавању проблема флуид-структурне интеракције у машинству за анализу оптерећења зидова цевовода. У биоинжењерингу, вршиће се даље спрезање са честичним методама у циљу анализа таложења холестерола или дистрибуције лекова унутар крвотока, анализа крварења, коагулације и деформације крвних судова.

# 13 Захвалница

Ово техничко решење настало је у оквиру пројекта технолошког развоја Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије ТР32036, као и накнадних инструмената финансирања научно истраживачког рада НИО ресорног министарства закључно са 451-03-66/2024-03/200378.

# 14 Референце


[1] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković and N. Grujović, Metod konačnih elemenata I, Linearna analiza, Kragujevac: Mašinski fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, 1998.

[2] M. Micunovic, Primenjena mehanika kontinuuma, Beograd: Naucna knjiga, 1990.

[3] G. A. Holzapfel, Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering, Chichester: John Wiley & Sons, 2000.

[4] N. Filipovic, M. Ivanovic and M. Kojic, "A comparative numerical study between dissipative particle dynamics and smoothed particle hydrodynamics when applied to simple unsteady flows in microfluidics," *Microfluid Nanofluid,* vol. 7, p. 227–235, 2009.

[5] K.-J. Bathe, Finite Element Procedures, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007.

[6] B. Šekutkovski, A. Grbović, I. Todić and A. Pejčev, "A partitioned solution approach for the fluid–structure interaction of thin-walled structures and high-Reynolds number flows using RANS and hybrid RANS–LES turbulence models," *Aerospace Science and Technology,* p. 106629, 2021.

[7] D. Vivaldi, "An assessment of CFD-scale fluid–structure interaction simulations through comprehensive experimental data in cross-flow," *Computers & Fluids,* vol. 278, p. 106303, 2024.

[8] H. Lin, H. Luan, A. Moiseevish Uzdin, S. Zhang, L. Wei and L. Yang, "A CFD-FEA coupled model for simulating dynamic response of offshore jacket platform under earthquake considering wind, wave, current and aftershock loads," *Ocean Engineering,* vol. 300, p. 117481, 2024.

[9] R. Abdi, N. Rezazadeh and M. Abdi, "Investigation of passive oscillations of flexible splitter plates attached to a circular cylinder," *Journal of Fluids and Structures,* vol. 84, pp. 302-317, 2019.

[10] M. Zhao, Y. Zou, Q. Fu and W. He, "Effects of airfoil on aerodynamic performance of flapping wing," *Biomimetic Intelligence and Robotics,* vol. 1, p. 100004, 2021.

[11] J. F. Zajaczkowski, E. S. Haupt and J. K. Schmehl, "A preliminary study of assimilating numerical weather prediction data into computational fluid dynamics models for wind prediction," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics,* vol. 99, no. 4, pp. 320-329, 2011.

[12] M. H. Hoskins, Kunz, R. F. Kunz, J. E. Bistline and C. Dong, "Coupled flow–structure–biochemistry simulations of dynamic systems of blood cells using an adaptive surface tracking method," *Journal of Fluids and Structures,* vol. 25, no. 5, pp. 936-953, 2009.

[13] Z. Deng, Q. Xiao, Y. Huang, L. Yang and Y. Liu, "A general FSI framework for an effective stress analysis on composite wind turbine blades," *Ocean Engineering,* vol. 291, p. 116412, 2024.

[14] D. De Santis and A. Shams, "Numerical study of flow-induced vibration of fuel rods," *Nuclear Engineering and Design,* vol. 361, p. 110547, 2020.

[15] K. J. Bathe, H. Zhang and M. H. Wang, "Finite element analysis of incompressible and compressible fluid flows with free surfaces and structural interactions," *Computers and Structures,* vol. 56, no. 2-3, pp. 193-213, 1995.

[16] H. Zhang, X. Zhang, S. Ji, Y. Guo, G. Ledezma, N. Elabbasi and H. deCougny, "Recent development of fluid–structure interaction capabilities in the ADINA system," *Computers & Structures,* vol. 81, no. 8–11, pp. 1071-1085, 2003.

[17] K. J. Bathe, H. Zhang and X. Zhang, "Some advances in the analysis of fluid flows," *Computers and Structures,* vol. 64, no. 5-6, pp. 909 - 930, 1997.

[18] P. Talebi Barmi and B. Vahidi, "3D numerical analysis of arterial thromboembolism through carotid bifurcation," *Journal of Computational & Applied Research in Mechanical Engineering,* vol. 13, no. 1, pp. 13-25, 2023.

[19] X. E. Salman, "Computational Modeling and Investigation of the Vibro-Acoustic Effects Induced by Intracranial Stenosis in a Simplified Head Model," *Journal of Vibration Engineering and Technologies,* vol. 11, no. 5, pp. 1973 - 1986, 2023.

[20] A. C. Arslan and H. E. Salman, "Effect of Intraluminal Thrombus Burden on the Risk of Abdominal Aortic Aneurysm Rupture," *Journal of Cardiovascular Development and Disease,* vol. 10, no. 6, 2023.

[21] C. A. Taylor, T. J. Hughes and C. K. Zarins, "Finite element modeling of blood flow in arteries," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 158, no. 1-2, pp. 155-196, 1998.

[22] A. K. Slone, K. Pericleous, C. Bailey, M. Cross and C. Bennett, "A finite volume unstructured mesh approach to dynamic fluid-structure interaction: An assessment of the challenge of predicting the onset of flutter," *Applied Mathematical Modelling,* vol. 28, no. 2, pp. 211-239, 2004.

[23] H.-J. Bungartz, F. Lindner, B. Gatzhammer, M. Mehl, K. Scheufele, A. Shukaev and B. Uekermann, "preCICE – A fully parallel library for multi-physics surface coupling," *Computers & Fluids,* vol. 141, pp. 250-258, 2016.

[24] G. Chourdakis, D. Schneider and B. Uekermann, "OpenFOAM-preCICE: Coupling OpenFOAM with External Solvers for Multi-Physics Simulations," *OpenFOAM® Journal,* vol. 3, p. 1–25, 2023.

[25] W. Feng, R. Jiang, H. Chen, S. Qiang, Z. Gong, Z. Li, J. Pan, W. Zhao, X. Zhang, X. Luo and X. Zhang, "Development of a multi-physics coupling system based on ICoCo interface and its validation on NEA-OECD core transient benchmark," *Annals of Nuclear Energy,* vol. 156, 2021.

[26] W. Joppich and M. Kürschner, "MpCCI—a tool for the simulation of coupled applications," *Concurrency and Computation: Practice and Experience,* vol. 18, no. 2, pp. 183-192, 2006.

[27] V. Mendez, M. Di Giuseppe and S. Pasta, "Comparison of hemodynamic and structural indices of ascending thoracic aortic aneurysm as predicted by 2-way FSI, CFD rigid wall simulation and patient-specific displacement-based FEA," *Computers in Biology and Medicine,* vol. 100, pp. 221-229, 2018.

[28] R. Ahrem, "Multidisciplinary Simulations with the Coupling Library MpCCI," *Proceedings in Applied Mathematics & Mechanics,* vol. 1, no. 1, pp. 39-42, 2002.

[29] X. Lv, Y. Zhao, X. Y. Huang, G. H. Xia and Z. J. Wang, "An efficient parallel/unstructured-multigrid preconditioned implicit method for simulating 3D unsteady compressible flows with moving objects," *Journal of Computational Physics,* vol. 215, no. 2, pp. 661-690, 2006.

[30] M. Kojić, N. Filipović, B. Stojanović and N. Kojić, Computer Modeling in Bioengineering, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008.

[31] Y. Shi, P. Lawford and R. and Hose, "Review of Zero-D and 1-D Models of Blood Flow in the Cardiovascular System," *Biomed. Eng.,* vol. 10, no. 33, 2011.

[32] M. Kojić, M. Milosevic, V. Simic, K. E. J. Fleming, S. Nizzero, N. Kojic, A. Ziemys and M. Ferrari, "A composite smeared finite element for mass transport in capillary

systems and biological tissue," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 324, pp. 413-437, 2017.

[33] J. Soulis, O. Lampri, D. Fytanidis, D. K. and G. Giannoglou, "Relative Residence Time and Oscillatory Shear Index of Non-Newtonian Flow Models in Aorta," in *Biomedical Engineering, 10th International Workshop on*, Kos, Greece, 2011.

[34] E. Weydahl and J. Moore, "Dynamic curvature strongly affects wall shear rates in a coronary artery bifurcation model," *Journal of Biomechanics,* vol. 34, no. 9, p. 1189–1196, 2001.

[35] A. Owida, H. Do and Y. Morsi, "Numerical analysis of coronary artery bypass grafts: An overview," *Computer Methods and Programs in Biomedicine,* vol. 108, no. 2, p. 689–705, 2012.

[36] L. Goubergrits, K. Affeld, J. Fernandez-Brittoy and L. Falcon, "Investigation of geometry and atherosclerosis in the human carotid bifurcations," *Journal of Mechanics in Medicine and Biology,* vol. 3, no. 1, pp. 31-48, 2003.

[37] J. M. McDonough, Introductory Lectures on Turbulence, Physics, Mathematics and Modeling, Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, 2007.

[38] D. C. Wilcox, "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models," *AIAA Journal,* vol. 26, no. 11, pp. 1299-1310, 1988.

[39] D. C. Wilcox, Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc., 1994.

[40] D. C. Wilcox, Turbulence Modeling for CFD, 3rd edition, DCW Industries Inc., 2006.

[41] S. Jovic and D. M. Driver, "Backward-facing step measurements at low reynolds number Reh=5000," *NASA Technical Memorandum 108807,* 1994.

[42] J. Boussinesq, "Essai sur la théorie des eaux courantes," *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,* 1877.

[43] D. Wilcox, "Formulation of the k-ω turbulence model revisited," *AIAA J.,* vol. 46, no. 11, p. 2823, 2008.

[44] J. Ferziger and M. Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics, 3rd ed ed., NewYork,: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[45] Z. Li, J. B. Hoagg, A. Martin and S. Bailey, "Retrospective cost adaptive Reynolds-averaged Navier–Stokes k–w model for data-driven unsteady turbulent simulations," *Journal of Computational Physics,* vol. 357, pp. 353-374, 2018.

[46] A. Tomboulides, S. Aithal, P. Fischer, E. Merzari, A. Obabko and D. Shaver, "A novel numerical treatment of the near-wall regions in the k-w class of RANS models," *International Journal of Heat and Fluid Flow,* vol. 72, pp. 186-199, 2018.

[47] K. J. Bathe, Finite Element Procedures, 2nd ed ed., Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

[48] S. Jovic and D. M. Driver, "Backward-facing step measurements at low Reynolds number, Re(sub h)=5000," in *NASA Technical Memorandum 108807,* p. 1994.

[49] A. Creech, A. Jackson, J. Maddison, J. Percival and T. Bruce, "Efficient Large Eddy Simulation for the Discontinuous Galerkin Method," *arXiv>physics,* p. 10, 21 October 2016.

[50] A. Fluent, "ANSYS Fluent Fluid Simulation Software," ANSYS, Inc, 2021. [Online]. Available: https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent. [Accessed 11 6 2021].

[51] S. Z. Zhao, B. Ariff, Q. Long, A. D. Hughes, S. A. Thom, A. V. Stanton and X. Y. Xu, "Inter-individual variations in wall shear stress and mechanical stress distributions at the

carotid artery bifurcation of healthy humans," *Journal of Biomechanics,* vol. 35, no. 10, pp. 1367-1377, 2002.